

VŠB – Technická univerzita Ostrava  
Fakulta elektrotechniky a informatiky  
Katedra aplikované matematiky

# **Párování metody parareal s metodami rozložení oblasti**

## **Coupled parareal and domain decomposition methods**

# Zadání diplomové práce

Student:

**Bc. Ivo Peterek**

Studijní program:

N2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor:

1103T031 Výpočetní matematika

Téma:

Párování metody parareal s metodami rozložení oblasti  
Coupled parareal and domain decomposition methods

Jazyk vypracování:

čeština

Zásady pro vypracování:

Numerické řešení rovnice vedení tepla je typicky založeno na časových iteracích, v rámci nichž se řeší pomocná stacionární úloha. To lze urychlit paralelním výpočtem v čase metodami parareal [1] nebo v prostoru metodami doménové dekompozice [2].

Obsahem této práce je:

1. Studium a implementace metody parareal pro obyčejnou diferenciální rovnici.
2. Diskretizace 1d nestacionární rovnice vedení tepla metodou konečných prvků.
3. Studium a implementace metody parareal pro soustavu obyčejných diferenciálních rovnic z bodu 2.
4. Studium metod rozložení oblasti, kombinace s metodou parareal a použití na úlohu z bodu 2.

Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] J.-L. Lions, Y. Maday, G. Turinici, A parareal in time discretization of PDEs. C.R. Acad. Sci. Paris, Serie I 332:661-668, 2001.  
[2] A. Toselli, O. Widlund, Domain Decomposition Methods - Algorithms and Theory. Springer, 2005.

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **doc. Ing. Dalibor Lukáš, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2017

Datum odevzdání: 13.07.2018



doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.  
vedoucí katedry



prof. Ing. Pavel Brandštetter, CSc.  
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární  
prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 27. dubna 2018



.....

Rád bych na tomto místě poděkoval doc. Ing Daliboru Lukášovi, Ph.D. za odbornou pomoc a motivaci při řešení této práce. Také děkuji všem, kteří mě při tvorbě diplomové práce podporovali.

## Abstrakt

Cílem textu této práce je kombinace metody parareal a Schwarzovy metodu rozložení oblastí umožňující efektivní paralelizaci časoprostorových úloh. Práce se zabývá numerickým řešením modelové nestacionární úlohy vedení tepla. Numerické řešení je založeno na semi-diskretizaci v prostoru pomocí metody konečných prvků, vedoucí na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic. V textu nejprve rozebíráme samostatně metodu parareal určenou pro paralelizaci v časové doméně. Poté se věnujeme Schwarzově metodě pro paralelizaci v prostorové oblasti. Nakonec ukážeme jak obě metody spárovat a umožnit tím paralelizaci v časoprostoru.

**Klíčová slova:** Metoda konečných prvků, parareal, Schwarzova metoda, nestacionární rovnice vedení tepla, párování metody parareal se Schwarzovou metodou, Eulerova metoda, semi-diskretizace v prostoru

## Abstract

This master thesis will discuss coupled parareal and Schwarz method allowing effective parallelization of problems in space-time domain. Thesis studies numerical solution of transient heat conduction problem. The numerical solution is based on the finite elements semi-semidiscretization in space domain, which leads to system of ordinary differential equations. We will first introduce parareal method for parallelization in only time domain. Then we discuss Schwarz method for parallelization in space domain. Finally, we will show how both methods can be coupled for effective parallelization in time-space domain.

**Key Words:** Finite element method, parareal, Schwarz method, transient heat conduction equation, coupled parareal method and Schwarz method, Euler method, semi-discretization in space

# Obsah

Seznam použitých zkratek a symbolů	7
Seznam obrázků	8
Seznam tabulek	9
Seznam výpisů zdrojového kódu	10
<b>1 Úvod</b>	<b>11</b>
<b>2 Nestacionární úloha vedení tepla</b>	<b>12</b>
2.1 Rovnice vedení tepla . . . . .	12
2.2 Variační formulace . . . . .	13
2.3 MKP semi-diskretizace v prostoru . . . . .	14
2.4 Diskretizace v čase implicitní Eulerovou metodou . . . . .	17
2.5 Příklad: Numerické řešení rovnice vedení tepla . . . . .	22
<b>3 Metoda parareal</b>	<b>24</b>
3.1 Parareal pro ODR . . . . .	24
3.2 Příklad: řešení ODR metodou parareal . . . . .	28
3.3 Parareal pro PDR . . . . .	30
3.4 Příklad: řešení PDR metodou parareal . . . . .	33
<b>4 Schwarzova metoda rozložení oblasti</b>	<b>35</b>
4.1 Schwarzova metoda pro nestacionární úlohu vedení tepla . . . . .	35
4.2 Příklad: Schwarzova metoda v prostoru pro časoprostorovou úlohu . . . . .	39
<b>5 Párování metody parareal se Schwarzovou metodou</b>	<b>41</b>
5.1 Použití Schwarzovy metody na lokální úlohy v pararealu . . . . .	41
5.2 Příklad: Párování metody parareal se Schwarzovou metodou . . . . .	46
<b>6 Závěr</b>	<b>49</b>
<b>Literatura</b>	<b>50</b>
<b>Přílohy</b>	<b>50</b>
<b>A Přílohy</b>	<b>51</b>

## Seznam použitých zkratk a symbolů

ODR	–	Obyčejná diferenciální rovnice
PDR	–	parciální diferenciální rovnice
MKP	–	Metoda konečných prvků
$\bar{v}$	–	vektor $v$
$\Omega$	–	Omega
$\overline{\Omega}$	–	Uzávěr množiny Omega

## Seznam obrázků

1	Modelová situace . . . . .	12
2	Grafy bazových funkcí na jejich nosičích . . . . .	15
3	Diskretizace úlohy ( $V^h$ ) v čase. . . . .	19
4	Řešení úlohy (16) s krokem $h = \Delta T = \frac{1}{29}$ v prostoru i čase. . . . .	22
5	Graf chyby Eulerovy metody při řešení úlohy (16) pro pevné $h$ . . . . .	23
6	Příklad diskretizace časového intervalu v metodě parareal. . . . .	24
7	Řešení úlohy (21) pro $\Delta T = \frac{1}{50}$ . . . . .	29
8	Graf konvergenčních křivek prvních 4 iterací pararealu pro ODR. . . . .	29
9	Řešení úlohy metodou parareal (24) pro $\Delta T = h = \frac{1}{20}$ . . . . .	34
10	Graf konvergenčních křivek prvních 3 iterací pararealu pro PDR. . . . .	34
11	Dekompozice časoprostorové oblasti na dvě podoblasti s překrytím. . . . .	36
12	Chyba iterací schwarzovy metody pro úlohu 26 s diskretizací $h = \Delta T = \frac{1}{30}$ , $\alpha = 0.4$ , $\beta = 0.6$ . . . . .	39
13	Iterace Schwarzovy metody pro úlohu (26) s diskretizací $h = \Delta T = \frac{1}{30}$ , $\alpha = 0.4$ , $\beta = 0.6$ . . . . .	40
14	Oblast $\Omega_{i,\beta}$ vzniklá použitím Schwarzovy metody na lokální úlohu v pararealu . . . . .	42
15	Řešení úlohy metodou párováním pararealu a Schwarzovy metody (29) pro $\Delta T =$ $h = \frac{1}{20}$ . . . . .	47
16	Graf konvergenčních křivek prvních 3 iterací párování pararealu a Schwarzovy metody s 3 iteracemi Schwarzovy metody na lokálních úlohách. . . . .	47
17	Graf konvergenčních křivek prvních 3 iterací párování pararealu a Schwarzovy metody s 6 iteracemi Schwarzovy metody na lokálních úlohách. . . . .	48



## Seznam tabulek

1	Počty iterací pararealu pro ODR v závislosti na diskretizaci hrubé sítě. . . . .	28
2	Počty iterací pararealu pro PDR v závislosti na diskretizaci hrubé sítě. . . . .	33
3	Počty iterací pro párování pararealu a Schwarzovy metody v závislosti na diskretizaci hrubé sítě pro 3 a 6 iterací lokálních úloh Schwarzovy metody. . . . .	46

## Seznam výpisů zdrojového kódu

1	Algoritmus Eulerovy metody pro (12) . . . . .	21
2	Algoritmus metody parareal pro ODR . . . . .	26
3	Algoritmus Schwarzovy metody pro nestacionární úlohu . . . . .	37
4	Algoritmus párování metody parareal a Schwarzovy metody . . . . .	44

# 1 Úvod

Současné superpočítače umožňují pomocí paralelizace rychle a přesně řešit rozsáhlé úlohy modelované parciálními diferenciálními rovnicemi, které jsou diskretizovány do miliard neznámých. Při řešení časově závislých úloh je numerické řešení typicky založeno na časových iteracích, v rámci nichž se řeší pomocná stacionární úloha. Tyto úlohy lze poté paralelizovat v prostoru využitím známých metod rozložení oblasti [8]. Jiným způsobem paralelizace je použití metody parareal [9] v časové doméně. Pokud ovšem chceme řešit úlohy v časoprostoru s velkým počtem časových i prostorových neznámých, je potřeba pro efektivnější paralelizaci provádět paralelní výpočet jak v čase, tak i v prostoru. Za tímto účelem proto studujeme párování metody parareal s metodami rozložení oblastí [5] [6].

Tato práce má především kompilační charakter. Zabýváme se v ní nestacionární úlohou vedení tepla v tyči a jejím numerickým řešením metodou konečných prvků vedoucí na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic, kterou lze řešit Eulerovou metodou. Představíme metodu parareal pro časovou paralelizaci a Schwarzovu metodu rozložení oblasti pro prostorovou paralelizaci a popíšeme i kombinaci použití obou metod zároveň v časoprostoru. Podstatnou částí této práce byla také vlastní implementace všech popisovaných metod v programovacím jazyce MATLAB.

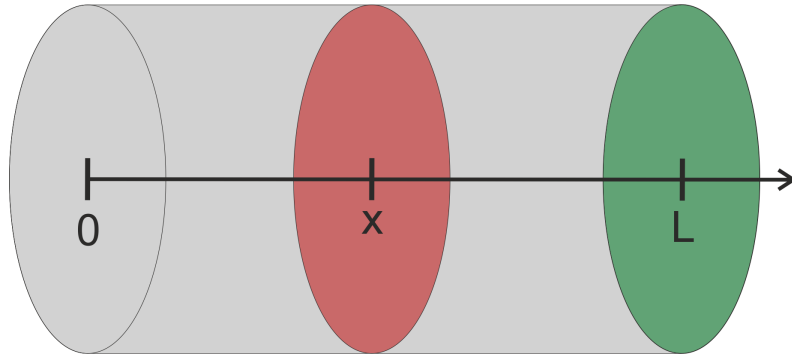
Text práce je strukturován do následujících kapitol:

2. Nejprve ukážeme časově závislý model parciální diferenciální rovnice vedení tepla a odvodíme variační formulaci. Poté provedeme semi-diskretizaci v prostoru pomocí metody konečných prvků vedoucí na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic, kterou následně vyřešíme pomocí implicitní Eulerovy metody.
3. Představíme metodu parareal pro ODR i PDR.
4. Popisujeme Schwarzovu metodu rozložení oblasti pro nestacionární úlohu.
5. Ukážeme jakým způsobem lze provést párování metody parareal a Schwarzovy metody.

## 2 Nestacionární úloha vedení tepla

V této kapitole se budeme zabývat rovnicí vedení tepla. Obdobné popisy rovnice vedení tepla, ze kterých jsem vycházel, je možno dohledat ve skriptech [2] a [7]. Jde o parabolickou parciální diferenciální rovnici, která popisuje rozložení teploty v dané oblasti a čase. Ukážeme si variační formulaci a následnou diskretizaci v prostoru pomocí metody konečných prvků. Nakonec provedeme diskretizaci rovnice v čase a získáme řešení použitím implicitní Eulerovy metody.

### 2.1 Rovnice vedení tepla



Obrázek 1: Modelová situace

Popíšeme si fyzikální model pro parciální diferenciální rovnici vedení tepla v tyči z homogenního materiálu s konstantním průměrem a délkou  $L$  v čase  $\langle 0, T \rangle$  s konstantní měrnou tepelnou kapacitou  $c$  a konstantní hustotou  $\rho$ . Budeme předpokládat že v každém příčném řezu je teplota konstantní. Díky tomu nám stačí pro určení teploty v bodě pouze jedna prostorová souřadnice  $x$ . Předpokládáme také, že tyč je dokonale tepelně izolovaná po celém plášti. Funkce  $u = u(x, t)$  vyjadřuje teplotu v bodě  $x$  a čase  $t$ . Hustotu tepelné energie budeme značit  $\rho c u(x, t)$ . Tepelný tok  $\tau(x, t)$  definujeme jako množství tepla proudící skrze jednotku plochy řezu v bodu  $x$  za jednotku času  $t$  ve směru osy  $x$ . Funkce  $f(x, t)$  popisuje tepelné zdroje v čase  $t$  a bodě  $x$ . Mějme také počáteční stav teploty  $u(x, t_0) = u_0(x)$  a stav v krajních bodech tyče  $u(0, t) = g_1(t)$  a  $u(L, t) = g_2(t)$ . Balance tepla je dána následující rovnicí

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial \tau}{\partial x}(x, t) + f(x, t).$$

Vztah mezi teplotou a tepelným tokem určuje Fourierův zákon. Říká nám, že tepelný tok  $\tau$  je přímo úměrný gradientu teploty  $\nabla u$  v součinu s konstantou tepelné vodivosti  $k$  a má opačný směr.

$$\tau = -k \frac{\partial u}{\partial x},$$

kde  $k > 0$ .

Budou-li konstanty  $\rho = 1$  a  $k = 1$ , pak dosazením z Fourierova zákona získáme rovnici:

$$c \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t) \quad (1)$$

Doplněním této rovnice o počáteční stav a informaci o teplotě v krajních bodech tyče získáme okrajovou a počáteční úlohu

$$(P) \quad \begin{cases} c \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t), & x \in (0, L), \quad t \in (0, T), \\ u(0, t) = g_1(t), & t \in (0, T), \\ u(L, t) = g_2(t), & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \langle 0, L \rangle. \end{cases}$$

## 2.2 Variační formulace

Ukážeme si nyní odvození variační formulace pro úlohu (P) s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami. Nejprve definujme oblast  $\Omega$ , časový interval a množinu testovacích funkcí  $V$ :

$$\Omega = (0, 1), x \in \Omega, t \in \langle 0, T \rangle,$$

$$V = \{v(x) \in H^1(\overline{\Omega}) : v(0) = v(1) = 0\}.$$

Variační formulaci dostaneme z rovnice vedení tepla a libovolné testovací funkce  $v(x)$  použitím následujících úprav:

$$\begin{aligned} c \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= f(x, t) \quad / \cdot v(x), \\ c \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)v(x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)v(x) &= f(x, t)v(x) \quad / \int_{\Omega} dx, \\ \int_{\Omega} c \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)v(x)dx - \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)v(x)dx}_{=:\gamma} &= \int_{\Omega} f(x, t)v(x)dx. \end{aligned} \quad (2)$$

Podívejme se blíže na část označenou jako  $\gamma$  v rovnici (2). Tuto část můžeme upravit pomocí vzorce pro integraci per partes, který si v rychlosti připomeneme

$$\int_a^b \varphi \cdot v' = [\varphi \cdot v]_a^b - \int_a^b \varphi' \cdot v.$$

Upravme tedy  $\gamma$  použitím per partes

$$- \int_{\Omega} \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)v(x)dx}_{=:\varphi'} = \int_{\Omega} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)v'(x)dx}_{=:\varphi} - \underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)v(x)\right]_0^1}_{=0}.$$

Hraniční člen bude nulový z definice prostoru testovacích funkcí  $V$ . Dosazením zpět získáme

$$\int_{\Omega} c \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) v(x) dx + \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) v'(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t) v(x) dx. \quad (3)$$

Výsledná variační formulace pro homogenní Dirichletovy podmínky  $u(0, t) = g_1(t) = 0$  a  $u(1, t) = g_2(t) = 0$  vypadá takto, viz [1]

$$(V) \quad \begin{cases} \text{Hledám } u(t) \in U \\ \frac{\partial}{\partial t}(u(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v) \quad \forall v \in V, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

kde

$$U := \{L^2(0, T; V) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega))\},$$

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) v'(x) dx,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u(t), v) := \int_{\Omega} c \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) v(x) dx,$$

$$(f(t), v) := \int_{\Omega} f(t) v(x) dx,$$

$$f(t) \in L^2((0, T) \times \Omega), u_0 \in L^2(\Omega)$$

**Poznámka 1** Zkoumání řešitelnosti úlohy (V) na prostoru  $U$  není cílem této práce. Na toto téma lze nalézt informace v [10].

### 2.3 MKP semi-diskretizace v prostoru

Spojitou časoprostorovou oblast budeme nejprve diskretizovat pouze v prostorové souřadnici. Zavedeme si dělení  $\mathcal{T}_h$  prostorové oblasti  $\Omega$  s krokem  $h$  a předpokládáme, že  $L$  je dělitelné  $h$ . Tím vytvoříme množinu bodů  $x_i$  v prostoru. Tyto získané body  $x_i$  budeme indexovat čísly 0 až  $N$ , kde  $N$  je celkový počet těchto bodů. Označme množinu všech indexů jako  $I = \{0, 1, \dots, M\}$  a dále množinu všech uzlů, ve kterých jsou předepsány okrajové podmínky Dirichletova typu, jako  $I_D = \{0, M\}$  a  $I_v = I \setminus I_D$ .

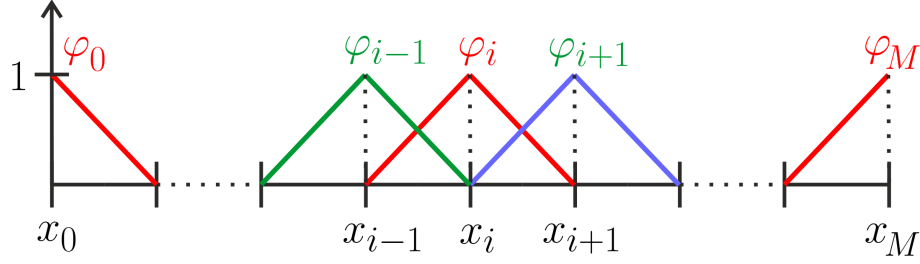
$$x_i, \quad i = 0, 1, \dots, M,$$

kde

$$M = \frac{L}{h} + 1.$$

Definujeme spojité po částech lineární báze funkce  $\varphi_i$  pro všechny body  $x_i$ , které jsou rovny 1 v uzlu, ke kterému náleží, ve všech ostatních uzlech jsou rovny 0.

$$\varphi_i(x_j) \begin{cases} 1 & , i = j, \\ 0 & , i \neq j. \end{cases}$$



Obrázek 2: Grafy báze funkcí na jejich nosičích

Na základě dělení  $\mathcal{T}_h$  definujeme následující prostory funkcí. V prostoru semi-diskretizovaný prostor  $\tilde{U}$ , který je podprostorem prostoru řešení  $U$  a konečně dimenzionální prostor  $\tilde{V}$  jako podprostor prostoru testovacích funkcí  $V$ .

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= U(\mathcal{T}_h), & \tilde{U} &\subset U \\ \tilde{V} &= V(\mathcal{T}_h), & \tilde{V} &\subset V \end{aligned}$$

Každou funkci  $\tilde{u} \in \tilde{U}$  lze vyjádřit jako lineární kombinaci báze funkcí ve tvaru:

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{i \in I} u_i(t) \varphi_i(x),$$

pro úlohu s Dirichletovými okrajovými podmínkami  $u(0, t) = g_1(t) = 0$  a  $u(1, t) = g_2(t) = 0$  platí, že

$$u_1(t) = 0,$$

$$u_M(t) = 0.$$

Dále testovací funkce  $\tilde{v} \in \tilde{V}$  bereme pouze ve tvaru

$$\tilde{v}(x) = \sum_{i \in I_v} v_i \varphi_i(x).$$

Výslednou MKP aproximací úlohy (V) je

$$(V^h) \quad \begin{cases} \text{Hledám } \tilde{u}(t) \in \tilde{U} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{u}, \varphi_i) + a(\tilde{u}, \varphi_i) = (f(t), \varphi_i) \quad \forall i \in I, \\ \tilde{u}(0) = \bar{u}_0, \end{cases}$$

kde

$$a(\tilde{u}, \varphi_i) = \sum_{j=0}^M u_j(t) \int_{\Omega} \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{u}, \varphi_i) = \int_{\Omega} c \frac{\sum_{j=0}^M \partial u_j(t) \cdot \varphi_j(x)}{\partial t} \varphi_i(x) dx, \quad (5)$$

$$(f(t), \varphi_i) = \int_{\Omega} f(t) \varphi_i(x) dx \quad (6)$$

Vektorová funkce  $f(t)$  vychází z funkce  $f(x, t)$ , která je diskretizována v prostorové souřadnici  $x$  podle diskretizace  $\mathcal{T}_h$  a  $\bar{u}_0$  označme vektor hodnot počáteční podmínky  $u_0(x)$  v bodech prostorové diskretizace  $x_i$ .

Z [7] víme, že pokud bychom neznali funkce  $u_1(t)$  a  $u_N(t)$ , tak integrál přes  $\Omega$  v (4) lze zapsat jako matici tuhosti  $\tilde{\mathbf{A}}$ . Obdobným způsobem můžeme přepsat také integrál (5) jako matici hmotnosti  $\tilde{\mathbf{M}}$  a (6) jako vektor pravé strany  $\tilde{b}(t)$ .

$$\tilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = c \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{b}(t) = f(t) \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

kde  $\tilde{\mathbf{M}}$  a  $\tilde{\mathbf{A}}$  jsou matice dimenze  $M \times M$  a  $\tilde{b}$  vektor délky  $M$ .

Odeberme z vektoru  $\tilde{b}(t)$  prvky na pozici Dirichletových podmínek s indexy  $I_D$  a označme nový vektor jako  $\bar{b}(t)$ . Také u matic  $\tilde{\mathbf{A}}$  a  $\tilde{\mathbf{M}}$  odeberme řádky a sloupce příslušné indexům okra-



jových podmínek  $I_D$ , nově vzniklé matice označíme jako  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{M}$ .

Úlohu  $(V^h)$  můžeme pomocí popsanych matic a vektoru přepsat do ekvivalentního tvaru

$$(V^h) \quad \begin{cases} \text{Hledám } \bar{u}(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{u}_H(t) \\ 0 \end{pmatrix}, & \bar{u}(t) \in \tilde{U}, \\ \mathbf{M}\bar{u}'_H(t) + \mathbf{A}\bar{u}_H(t) = \bar{b}(t), \\ \bar{u}_H(0) = \bar{u}_0, \end{cases} \quad (7)$$

kde  $\bar{u}_0$  je vektor hodnot počáteční podmínky  $u_0(x)$  v bodech  $x_i, i = \{1, \dots, N-1\}$ . Vektor  $\bar{u}_H(t)$  nazýváme homogenním řešením.

Pokud bychom měli zadány nehomogení Dirichletovy podmínky  $g_1(t)$  a  $g_2(t)$  můžeme zapsat řešení úlohy jako součet partikulárního a homogenního řešení. Partikulárním řešením  $\bar{u}_P(t)$  rozumíme řešení v bodech příslušných okrajovým podmínkám, tedy  $\bar{u}_P(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}$ . Vezmeme z matice  $\tilde{\mathbf{A}}$  a  $\tilde{\mathbf{M}}$  sloupce s indexy okrajových podmínek  $I_D$ , takto vytvořené matice označíme  $\hat{\mathbf{A}}$  a  $\hat{\mathbf{M}}$ . Úloha  $(V^h)$  splňující nehomogenní dirichletovy okrajové podmínky by pak vypadala následovně

$$(V^h) \quad \begin{cases} \text{Hledám } \bar{u}(t) := \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \bar{u}_H(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}, & \bar{u}_H(t) \in \tilde{U}, \\ \mathbf{M}\bar{u}'_H(t) + \mathbf{A}\bar{u}_H(t) = \bar{b}(t) - \hat{\mathbf{M}}\bar{u}'_P(t) - \hat{\mathbf{A}}\bar{u}_P(t), \\ \bar{u}_H(0) = \bar{u}_0, \end{cases} \quad (8)$$

Úloha  $(V^h)$  je soustavou ODR. Pro nalezení řešení úlohy  $(V^h)$  lze použít tradičních numerických metod pro časovou diskretizaci ODR nebo v následujících kapitolách popisovanou metodu parareal, případně i parareal v kombinaci se Schwarzovou metodou.

## 2.4 Diskretizace v čase implicitní Eulerovou metodou

Jednou z tradičních způsobů používaných k řešení úlohy  $(V^h)$  je implicitní Eulerova metoda. Tato metoda aproximuje hledanou funkci  $u(t)$  v bodech časové diskretizace. Více o Eulerově metodě a dalších metodách pro řešení ODR lze nalézt ve skriptech [3], z nichž jsem získal informace pro přípravu této kapitoly.

Pro představení implicitní Eulerovy metody nejprve uvažujme následující počáteční úlohu

$$\begin{cases} \text{Hledám } u(t) : \langle 0, T \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \\ u'(t) = f(u(t), t), & t \in \langle 0, T \rangle. \\ u(0) = \hat{u}, \end{cases} \quad (9)$$

kde  $f(u, t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  je známá funkce. Zavedeme nyní dělení ekvidistantní časového intervalu  $\langle 0, T \rangle$  s krokem  $\Delta T$ . Získané uzly v časové ose indexujeme  $n = 0, 1, 2, \dots, N$  a značíme je jako  $t^n$ .

Toto dělení označíme jako  $\mathcal{T}_{\Delta T}$ . Aproximaci řešení v čase  $t^n$  označíme jako  $u^n$ . Předpis pro krok metody odvodíme z Taylorovy řady pro funkci  $u(t)$  sestavené pro libovolný časový krok  $t^{n+1}$  a vyhodnocené v předchozím kroku  $t^n$ .

$$u(t^n) = u(t^{n+1}) - u'(t^{n+1})\Delta T + O(\Delta T^2).$$

Provedeme substituci první časové derivace funkce  $u$  použitím rovnice (9)

$$u(t^n) = u(t^{n+1}) - f(u(t^{n+1}), t^{n+1})\Delta T + O(\Delta T^2).$$

Pokud po provedení substituce vezmeme součet prvních dvou členů a předpokládáme, že  $u^n = u(t^n)$  získáme předpis pro  $n + 1$  krok implicitní Eulerovy metody.

$$u^{n+1} = u^n + \Delta T f(u^{n+1}, t^{n+1}). \quad (10)$$

Při použití metody začneme známou počáteční hodnotou  $u^0 = u(0) = \hat{u}$  a dále řešíme rovnici (10) postupně pro  $n = 1, 2, \dots, M$ . Rovnici (10) lze zapsat i v následujícím ekvivalentním tvaru.

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta T} = f(u^{n+1}, t^{n+1}). \quad (11)$$

Ukažme si také jak lze implicitní Eulerovu metodu použít i pro soustavy ODR. Uvažujme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic, tedy soubor  $k$  diferenciálních rovnic o  $k$  neznámých funkcí  $u_1(t), \dots, u_k(t) : \langle 0, T \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  a k nim příslušné počáteční podmínky  $u_1(t_0) = \hat{u}_1, \dots, u_k(t_0) = \hat{u}_k$ .

$$\begin{aligned} u'_1(t) &= f_1(u_1(t), \dots, u_k(t), t) \\ u'_2(t) &= f_2(u_1(t), \dots, u_k(t), t) \\ &\vdots \\ u'_k(t) &= f_k(u_1(t), \dots, u_k(t), t), \end{aligned}$$

takovouto soustavu ODR můžeme zapsat vektorově

$$\bar{u}'(t) = \bar{f}(\bar{u}(t), t),$$

kde

$$\bar{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_k(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{f}(\bar{u}(t), t) = \begin{bmatrix} f_1(\bar{u}(t), t) \\ f_2(\bar{u}(t), t) \\ \vdots \\ f_k(\bar{u}(t), t) \end{bmatrix}.$$

Soustavu v uvedeném tvaru lze řešit stejně jako (10).

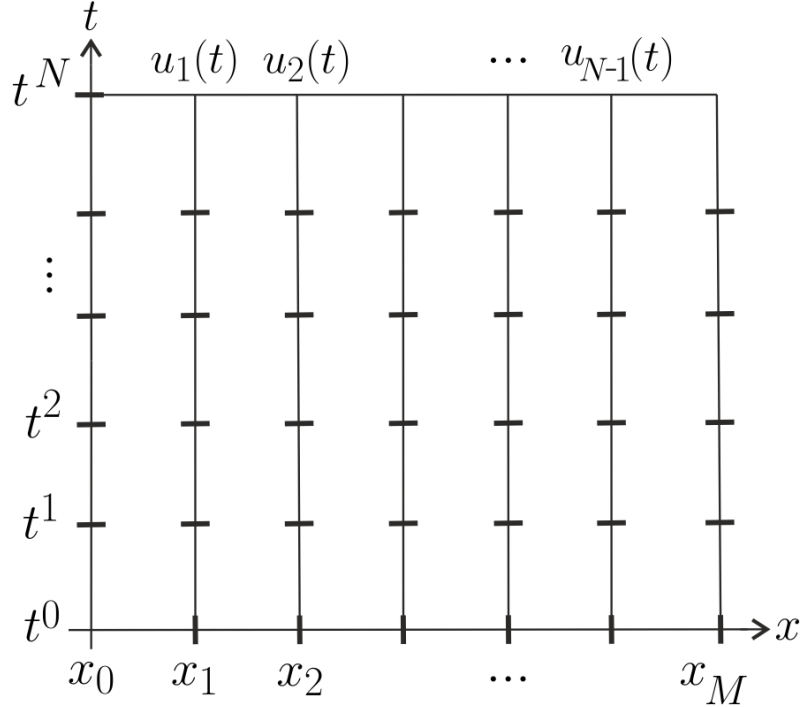
$$\bar{u}^{n+1} = \bar{u}^n + \Delta T \bar{f}(\bar{u}^{n+1}, t^{n+1}).$$

V tuto chvíli můžeme s použitím výše popsaných postupů přejít k časové diskretizaci soustavy ODR vzniklé MKP semi-diskretizací úlohy v prostoru. Na soustavu ODR v úloze  $(V^h)$  s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami (7) aplikujeme dělení časového intervalu  $\mathcal{T}_{\Delta T}$  a implicitní Eulerovu metodu, viz (11) a získáme předpis

$$\frac{\mathbf{M}(\bar{u}_H^{n+1} - \bar{u}_H^n)}{\Delta T} + \mathbf{A}\bar{u}_H^{n+1} = b(t^{n+1})$$

s počáteční hodnotou  $\bar{u}_H^0 = \bar{u}_0$ . Po jeho přeuspořádání dostaneme

$$\left( \frac{1}{\Delta T} \mathbf{M} + \mathbf{A} \right) \bar{u}_H^{n+1} = b(t^{n+1}) + \frac{1}{\Delta T} \mathbf{M} \bar{u}_H^n. \quad (12)$$



Obrázek 3: Diskretizace úlohy  $(V^h)$  v čase.

Obdobně aplikováním dělení  $\mathcal{T}_{\Delta T}$  a implicitní Eulerovy metody na soustavu ODR v úloze  $(V^h)$  s nehomogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami (8) dostaneme

$$\frac{\mathbf{M}(\bar{u}_H^{n+1} - \bar{u}_H^n)}{\Delta T} + \mathbf{A}\bar{u}_H^{n+1} = \bar{b}(t^{n+1}) - \frac{\hat{\mathbf{M}}}{\Delta T}(\bar{u}_P(t^{n+1}) - \bar{u}_P(t^n)) - \hat{\mathbf{A}}\bar{u}_P(t^{n+1})$$

s počáteční hodnotou  $(\bar{u}_H)_0 = \bar{u}_0$ . Po přeuspořádání získáme

$$\left( \frac{1}{\Delta T} \mathbf{M} + \mathbf{A} \right) \bar{u}_H^{n+1} = \bar{b}(t^{n+1}) - \frac{\hat{\mathbf{M}}}{\Delta T}(\bar{u}_P(t^{n+1}) - \bar{u}_P(t^n)) - \hat{\mathbf{A}}\bar{u}_P(t^{n+1}) + \frac{1}{\Delta T} \mathbf{M} \bar{u}_H^n. \quad (13)$$

Poznamenejme, že v každém kroku Eulerovy metody pro úlohu  $(V^h)$  s homogenními (12) i nehomogenními (13) Dirichletovými podmínkami řešíme soustavu lineárních rovnic, která představuje MKP aproximaci pomocné stacionární okrajové úlohy vedení tepla.

$$\begin{aligned} c \frac{\partial u_{k,\beta}^{i,p}}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u_{k,\beta}^{i,p}}{\partial x^2}(x, t) &= f(x, t), & (x, t) \in \Omega_{i,\beta}, \\ u_{k,\beta}^{i,p}(0, t) &= 0, & t \in (T^n, T^{n+1}), \\ u_{k,\beta}^{i,p}(\beta, t) &= u_{k,\alpha}^{i,p-1}(\beta, t), & t \in (T^n, T^{n+1}), \\ u_{k,\beta}^{i,p}(T^n) &= \bar{U}_{k,\beta}^n, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} c \frac{\partial u_{k,\alpha}^{i,p}}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u_{k,\alpha}^{i,p}}{\partial x^2}(x, t) &= f(x, t), & (x, t) \in \Omega_{i,\alpha}, \\ u_{k,\alpha}^{i,p}(\alpha, t) &= u_{k,\beta}^{i,p-1}(\alpha, t), & t \in (T^n, T^{n+1}), \\ u_{k,\alpha}^{i,p}(L, t) &= 0, & t \in (T^n, T^{n+1}), \\ u_{k,\alpha}^{i,p}(T^n) &= \bar{U}_{k,\alpha}^n, \end{aligned} \quad (15)$$

pro  $p = 1, 2, 3, \dots$ , kde  $\bar{U}_{k,\alpha}^n$  a  $\bar{U}_{k,\beta}^n$  jsou částí vektoru  $\bar{U}_k^n$  odpovídající rozdělení na podoblasti  $\Omega_{i,\alpha}$  a  $\Omega_{i,\beta}$ ,  $i = 0, \dots, N$  a  $k$  je číslo iterace pararealu. Identicky s kapitolou 3 zavedeme jemné dělení  $\mathcal{T}_{h,\Delta t}$ . Body tohoto dělení v prostoru musí nyní navíc respektovat rozdělení na podoblasti  $\Omega_{i,\alpha}$  a  $\Omega_{i,\beta}$  to znamená, že některé z jeho bodů musí být rovny  $\alpha$  a  $\beta$ .

Pomocí znalostí získaných z předchozích kapitol jsme schopni získat numerickou aproximaci řešení úloh (27) a (28) pro  $k = 1$  na všech podoblastech. Jejich numerické řešení označíme jako  $(\bar{u}_{1,\alpha}^i)^n$  a  $(\bar{u}_{1,\beta}^i)^n$ , pro  $n = 0, \dots, N_t$ . Podle (25) jsme z nich schopni sestavit výsledné řešení Schwarzovy metody  $(\bar{u}_1^i)^n$  pro  $i$ -tou lokální úlohu metody parareal.

Poté již můžeme opět přistoupit k provádění korekčních iterací pararealu pro  $k = 1, 2, \dots$ . Připomeňme si kroky z nich se iterace skládají a popíšeme případné změny.

1. Vypočtení skoků v bodech hrubé sítě  $\bar{S}_k^n$

$$\bar{S}_k^n = (\bar{u}_k^{n-1})^{N_t} - \bar{U}_k^n,$$

kde  $(\bar{u}_k^{n-1})^{N_t}$  rozumíme vektor vypočtený v posledním časovém kroce  $t^{N_t}$  lokální úlohy s indexem  $i = n - 1$ .

2. Propagování skoků na hrubé síti

$$\begin{cases} \left( \frac{1}{\Delta T} \mathbf{M} + \mathbf{A} \right) \bar{\delta}_k^{n+1} = \frac{1}{\Delta T} \mathbf{M} (\bar{\delta}_k^n + \bar{S}_k^n), \\ \bar{\delta}_k^0 = \bar{0}, \end{cases}$$

kde  $n = 1, 2, \dots, N - 1$ .

3. Sestavením  $\bar{U}_{k+1}^n$

$$\bar{U}_{k+1}^n = (\bar{u}_k^{n-1})^{N_t} + \bar{\delta}_k^n$$

a řešením nově sestavených lokálních úloh nyní již i s využitím jejich rozkladu v prostorové oblasti Schwarzovou metodou vedoucí na k sestavení  $\bar{u}_{k+1}^i$  pro všechna  $i = 0, 1, \dots, N$ .

V metodě parareal vezmeme jako ukončovací kritérium eukleidovskou normu rozdílu dvou iterací  $\bar{U}_k^n$  a  $\bar{U}_{k+1}^n$ . Ve Schwarzově metodě si vystačíme s pevným počtem iterací a ukončovací kritérium tedy není potřeba definovat.

---

```
function [u] = backwardEuler(u0,tspan,dt)
global b A M
N=length(tspan);

u(:,1)=u0;
for k=1:N-1
u(:,k+1) = (M/dt+A)\((b+(M/dt)*(u(:,k))));
end
```

---

Výpis 1: Algoritmus Eulerovy metody pro (12)

## 2.5 Příklad: Numerické řešení rovnice vedení tepla

Uvažujme konkrétní úlohu vedení tepla

$$\begin{cases} 25 \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, & x \in (0, 1), \quad t \in (0, 1), \\ u(0, t) = 0, & t \in (0, 1), \\ u(1, t) = 0, & t \in (0, 1), \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (16)$$

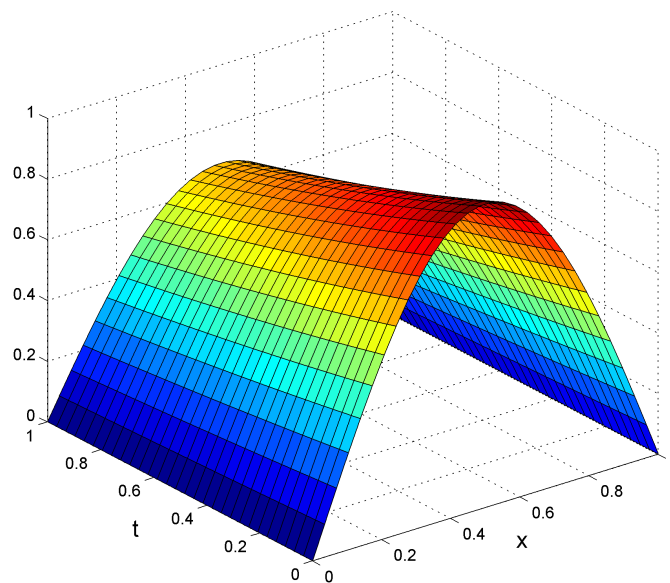
Výsledek analytického řešení této úlohy je

$$u(x, t) = e^{-\frac{\pi^2}{25}t} \sin(\pi x) \quad (17)$$

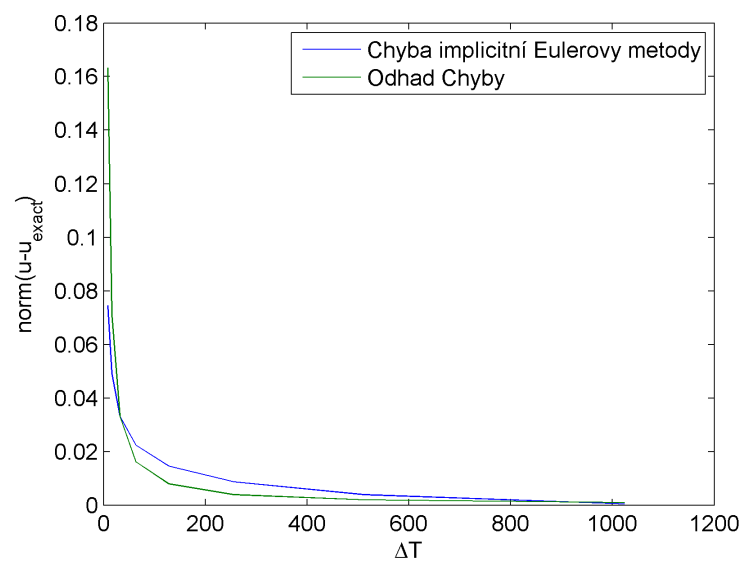
Na obrázku 4 vidíme graf numerického řešení úlohy 16 pro diskretizaci krokem  $h = \Delta T = \frac{1}{29}$ . Dále jsem napočítal jsem numerické řešení pro fixní krok  $h = 1/63$  v prostoru a různě velké kroky  $\Delta T$ . Z výsledných hodnot jsem vypočetl chybu jako eukleidovskou normu rozdílu numerického řešení a analytického řešení v bodech dané diskretizace. Víme, že chybu eulerovy metody, již by výsledná chyba řešení pro pevné  $h$  a různé  $\Delta T$  měla odpovídat, lze odhadnout jako

$$err_{\text{euler}} = N \Delta T^2.$$

Naměřené hodnoty zobrazené v grafu na obrázku 5 tomuto odhadu skutečně přibližně odpovídají.



Obrázek 4: Řešení úlohy (16) s krokem  $h = \Delta T = \frac{1}{29}$  v prostoru i čase.



Obrázek 5: Graf chyby Eulerovy metody při řešení úlohy (16) pro pevné  $h$ .

### 3 Metoda parareal

Cílem metody parareal je efektivní paralelní implemetace řešení diferenciálních rovnic v časové doméně. Metoda je založena na použití Eulerova schématu, kombinaci hrubého řešení a nezávislých jemných řešení podobně jako u standardních metod rozložení oblastí. Tato metoda byla poprvé představena v článku "A parareal in time discretization of PDE's" [9]. V této kapitole si zmíněnou metodu ukážeme na Cauchyho úloze pro obyčejnou diferenciální rovnici a popíšeme použití metody i pro systém obyčejných diferenciálních rovnic.

#### 3.1 Parareal pro ODR

Uvažujme nyní obyčejnou diferenciální rovnici na zadaném intervalu s počáteční podmínkou

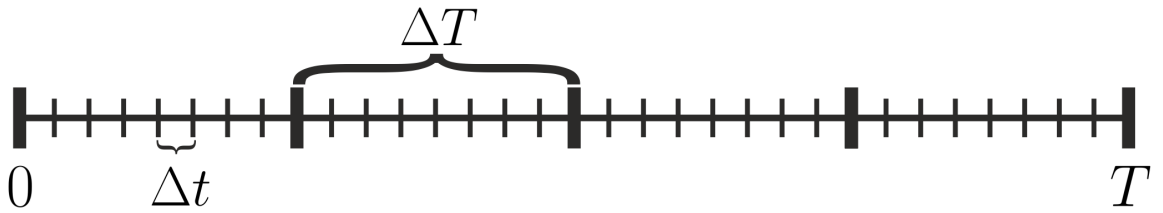
$$\begin{cases} y'(t) &= -ay(t), \quad t \in (0, T), a \in \mathbb{R}, \\ y(0) &= y_0. \end{cases} \quad (18)$$

Zavedeme dělení časového intervalu  $\langle 0, T \rangle$  do  $N$  podintervalů s body  $T^n$ , kde  $n = 0, 1, 2, \dots, N+1$  s krokem o velikosti  $\Delta T = T/N$ . Tímto vzniknou podintervaly  $\langle T^n, T^{n+1} \rangle$ . Toto dělení budu dále nazývat hrubou sítí.

Označme  $Y_1^n$  jako počáteční aproximaci řešení úlohy (18) v bodě  $T^n$  na hrubé síti. Tuto aproximaci získáme použitím implicitní Eulerovy metody na síti s hrubým krokem  $\Delta T$ .

$$\begin{cases} \frac{Y_1^{n+1} - Y_1^n}{\Delta T} + aY_1^{n+1} &= 0, \quad n = 1, \dots, N, \\ Y_1^0 &= y_0. \end{cases}$$

**Poznámka 2** Místo implicitní Eulerovy metody lze použít i jiné Runge-Kutta metody. V této práci se ale budeme zabývat pouze pararealem s použitím implicitní Eulerovy metody.



Obrázek 6: Příklad diskretizace časového intervalu v metodě parareal.

Vypočtené hodnoty  $Y_1^n$  poté použijeme k výpočtu řešení na každém časovém intervalu  $\langle T^n, T^{n+1} \rangle$ . Tyto hodnoty budou sloužit jako počáteční podmínky pro lokální úlohy řešené na jednotlivých intervalech. Je důležité poznamenat, že takovéto úlohy jsou na sobě nezávislé a mohou být již řešeny paralelně. Při hledání jejich řešení obvykle provádíme jejich aproximaci na jemné síti implicitní Eulerovou s dostatečně malým krokem v čase  $\Delta t \ll \Delta T$ . Pro zjednodušení



můžeme v tomto případě také hledat analytické řešení jednotlivých úloh.

$$\begin{cases} \frac{dy_1^n}{dt}(t) = -ay_1^n(t), & t \in \langle T^n, T^{n+1} \rangle, \\ y_1^n(T^n) = Y_1^n. \end{cases}$$

Následně pomocí korekčních iterací pro  $k = 1, 2, \dots$  zvyšujeme řád přesnosti uvedeného schématu. Jednotlivé iterace se skládají z následujících tří kroků:

1. Vypočtení skoků v bodech hrubé sítě  $S_k^n$

$$S_k^n = y_k^{n-1}(T^n) - Y_k^n.$$

2. Propagování skoků

$$\begin{cases} \frac{\delta_k^{n+1} - \delta_k^n}{\Delta T} + a\delta_k^{n+1} = \frac{S_k^n}{\Delta T}, \\ \delta_k^0 = 0. \end{cases}$$

3. Sestavením  $Y_{k+1}^n$

$$Y_{k+1}^n = y_k^{n-1}(T^n) + \delta_k^n$$

a řešením nově sestavených lokálních úloh, která můžou být opět řešeny paralelně

$$\begin{cases} \frac{dy_{k+1}^n}{dt}(t) = -ay_{k+1}^n(t), & t \in \langle T^n, T^{n+1} \rangle, \\ y_{k+1}^n(T^n) = Y_{k+1}^n. \end{cases}$$

Jako ukončovací kritérium můžeme uvažovat například jednoduše nulovost skoků vypočtených v kroce 1. nebo sledovat eukleidovskou normu rozdílu dvou iterací  $Y_k^n$  a  $Y_{k+1}^n$ . Algoritmus metody parareal v programovacím jazyce MATLAB je uveden na následující straně.

**Tvrzení 1** viz [9]. *Iterační schéma metody parareal je řádu  $k$ , to znamená, že existuje konstanta  $c_k$  taková, že*

$$\forall n, 0 \leq n \leq N-1, \quad |Y_k^n - y(T^n)| + \max_{t \in \langle T^n, T^{n+1} \rangle} |y_k^n(t) - y(t)| \leq c_k \Delta T^k \quad (19)$$

Z toho plyne že pro pevně zafixovaný krok iterace  $k$ , lze chování algoritmu v  $k$ -té iteraci odhadnout pouze pomocí  $\Delta T$ . V grafech chyby numerického řešení bychom tedy měli poznat její zlepšení pokud v rámci jedné iterace zmenšíme  $\Delta T$  nezávisle na ostatních parametrech metody. Zmíněnou chybu v kroku  $vn$  vypočteme jako

$$err_{\text{parareal}}^n = |Y_k^n - y(T^n)|, \quad (20)$$

kde  $y(T^n)$  je analytické řešení v bodě  $T^n$ .

---

```

function [err]=parareal(dT)
%PARAREAL  $y'(t)=-y(t)$ ,  $y(0)=1$ , na intervalu  $(0,1)$ 
% clear;
global a
eps=1e-15;
% dT = 0.002;
dt = dT/100;
a=1;

T0 = 0; Tend = 1; Y0 = 1;
Y_exact=exp(-a*(T0:dT:Tend));

N = round((Tend-T0)/dT)
[T,Y] = backwardEuler(Y0,dT,T0,N);

itMax=N+100;
Y_n={};
iterace=0;
for i=1:itMax
iterace=iterace+1;
y_(1)=Y(1);
for j = 1:N
y0=Y(j);
t0=T(j);
t_end=T(j+1);

C=y0/exp(-a*t0);
y_act=C*exp(-(a*t_end));

y_(j+1)=y_act;
end

%%Výpočet skoků
S=y_-Y;

%%Propagace skoků
delta0=0;

```

```
[T,delta] = backwardEuler_delta(S,delta0,dT,T0,N);
```

```
Y_n{i}=Y;
```

```
Y=y_+delta;
```

```
err(i)=log(norm(Y-Y_exact));
```

```
if norm(Y-Y_n{i})<eps
```

```
break
```

```
end
```

```
end
```

```
iterace
```

```
end
```

---

Výpis 2: Algoritmus metody parareal pro ODR

### 3.2 Příklad: řešení ODR metodou parareal

Vezměme si jako příklad konkrétní úlohu

$$\begin{cases} y'(t) &= -12y(t), \quad t \in (0, 1), \\ y(0) &= 1. \end{cases} \quad (21)$$

Poznamenejme také, že známe i analytické řešení této úlohy

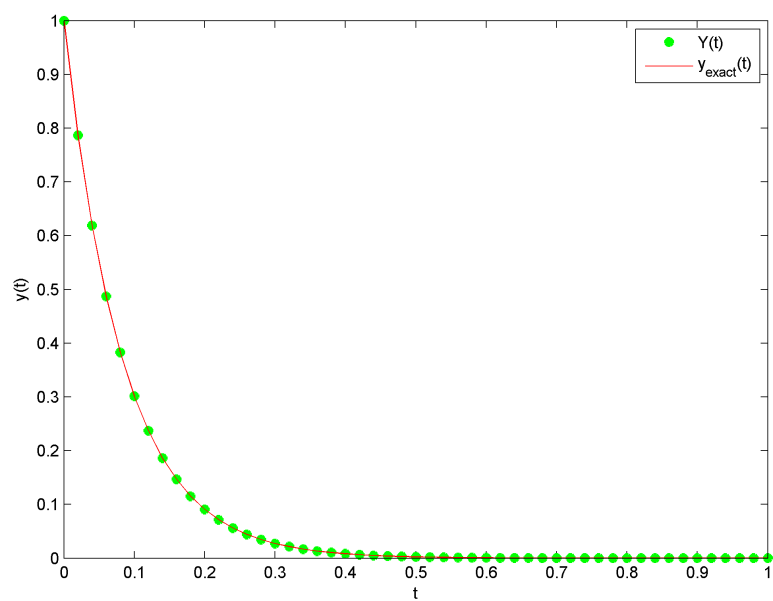
$$y_{\text{exact}}(t) = e^{-12t}.$$

Na zvolenou úlohu (21) aplikujeme metodu parareal. Úloha byla řešena pro různě velké diskretizační kroky na hrubé síti. Úlohy na jemné síti byly řešeny analyticky. Jako ukončovací kritérium jsem použil eukleidovskou normu řešení  $Y_k^n$  a přesného řešení, tedy  $|Y_k^n - y_{\text{exact}}(T^n)|_2$ . Všechny výpočty byly prováděny s relativní přesností  $\text{eps} = 10^{-15}$ .

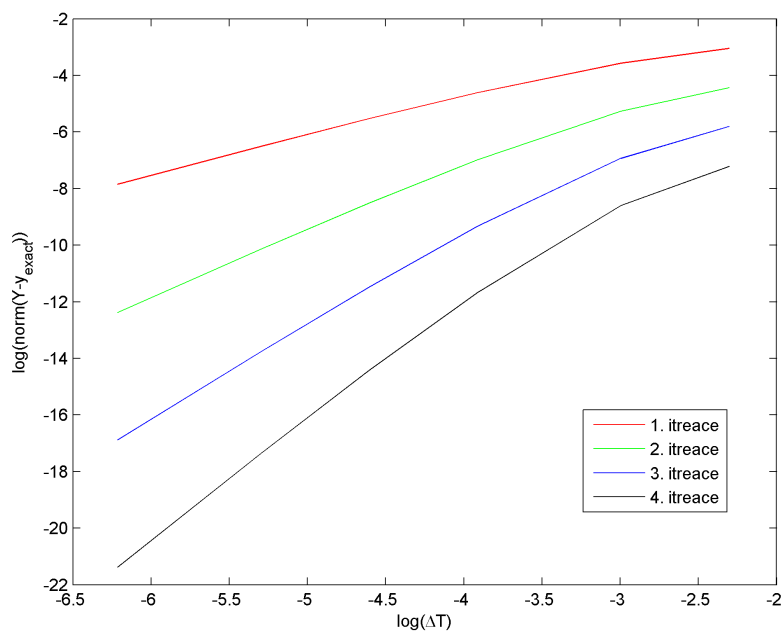
Tabulka 1: Počty iterací pararealu pro ODR v závislosti na diskretizaci hrubé sítě.

$\Delta T$	Počet iterací parareal
1/10	10
1/20	15
1/50	14
1/100	11
1/200	9
1/500	8

V tabulce 1 vidíme, že pro menší velikost dílku  $\Delta T$  na hrubé síti nám klesá počet iterací, je ovšem potřeba si uvědomit, že iterace budou výpočetně náročnější než pro větší  $\Delta T$ . Obrázek 8 znázorňuje Graf konvergenčních křivek v logaritmické škále. Můžeme vidět, že pokud v  $k$ -té iteraci zmenšíme krok  $\Delta T$  bude výsledná chyba taky menší. To je v souladu s tvrzením 1.



Obrázek 7: Řešení úlohy (21) pro  $\Delta T = \frac{1}{50}$ .



Obrázek 8: Graf konvergenčních křivek prvních 4 iterací pararealu pro ODR.

### 3.3 Parareal pro PDR

Metoda parareal pro PDR bude podobná její verzi pro ODR. Podobně jako u Eulerovy metody pro ODR a pro soustavy spočívá hlavní rozdíl ve verzích metody parareal pro PDR a ODR v tom že místo pouze jedné rovnice budeme řešit vektorově zapsanou soustavu ODR.

Uvažujme nyní počáteční a okrajovou úlohu vedení tepla na časoprostorové oblasti  $\Omega = (0, L) \times (0, T)$ , kde pro zjednodušení zápisu uvažujeme pouze s nulovými homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami

$$\left\{ \begin{array}{ll} c \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= f(x, t), \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, T), \\ u(0, t) &= 0, \quad t \in (0, T), \\ u(L, t) &= 0, \quad t \in (0, T), \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad x \in (0, L). \end{array} \right. \quad (22)$$

Nejprve zavedeme ekvidistantní dělení časoprostorové oblasti  $\Omega$  s krokem  $\Delta T$  v časové souřadnici a  $h$  v prostorové souřadnici tak, že  $T$  je beze zbytku dělitelné  $\Delta T$  a  $L$  je beze zbytku dělitelné  $h$ . Body vzniklé dělením v časových souřadnicích označíme opět  $T^n$ . Tyto body tvoří hranice  $N$  podintervalů  $\langle T^n, T^{n+1} \rangle$ , kde  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Body vzniklé dělením v časových souřadnicích označíme jako  $x_i$ , kde  $i = 0, 1, 2, \dots, M$ . Popsané dělení značíme  $\mathcal{T}_{h, \Delta T}$  a nazýváme jej hrubou sítí.

**Poznámka 3** Pokud bychom řešili úlohu s nehomogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami algoritmus řešení pomocí metody parareal zůstane stejný. Bude potřeba pouze provést úpravy stejně jako v kapitole 2, ty ovšem neovlivní nyní popisovaný postup řešení.

Úlohu (22) nejdříve budeme diskretizovat v prostoru pomocí MKP viz kapitola 2. Tím získáme systém ODR a provedeme jeho počáteční aproximaci na hrubé síti Eulerovou metodou označenou  $\bar{U}_1^n$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{1}{\Delta T} \mathbf{M} + \mathbf{A} \right) \bar{U}_1^{n+1} = b(T^{n+1}) + \frac{1}{\Delta T} \mathbf{M} \bar{U}_1^n, \\ \bar{U}_1^0 = \bar{u}_0, \end{array} \right. \quad (23)$$

kde  $n = 1, 2, 3, \dots, N-1$ . Hodnoty počáteční aproximace na hrubé síti  $\bar{U}_1^n$  poté použijeme jako počáteční podmínky pro lokální úlohy na všech časových intervalech  $\langle T^n, T^{n+1} \rangle$ . Stejně jako při řešení ODR jsou tyto úlohy na sobě nezávislé a mohou je řešit paralelně. Jednotlivé lokální úlohy oindexujeme  $i = 0, 1, \dots, N$ . Formulace lokální  $i$ -té lokální úlohy je následující

$$\left\{ \begin{array}{ll} c \frac{\partial u_1^i}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial x^2}(x, t) &= f(x, t), \quad x \in (0, L), \quad t \in (T^n, T^{n+1}), \\ u_1^i(0, t) &= 0, \quad t \in (T^n, T^{n+1}), \\ u_1^i(L, t) &= 0, \quad t \in (T^n, T^{n+1}), \\ u_1^i(T^n) &= \bar{U}_1^n. \end{array} \right.$$

Pro řešení lokálních úloh zavedeme dělení  $\mathcal{T}_{h,\Delta t}$  a nazveme jej jemnou sítí. Jemnou síť  $\mathcal{T}_{h,\Delta t}$  vytvoříme zjemněním hrubé sítě  $\mathcal{T}_{h,\Delta T}$  v čase, prostorové dělení tedy zůstane stejné a nemusíme tedy znovu sestavovat systém ODR a budeme jej pouze řešit na jiných časových intervalech. Zjemnění hrubé sítě provedeme tak, že krok diskretizace v časové souřadnici  $\Delta T$  nahradíme krokem v čase pro jemnou síť  $\Delta t$ . Pro  $\Delta t$  platí že  $\frac{T}{\Delta t}$  je celé číslo a zároveň  $\Delta T \ll \Delta t$ . Body diskretizace pro  $i$ -tou lokální úlohu v časové souřadnici označíme jako  $t^n$ , jejich počet na daném intervalu vypočteme jako  $N_t = \frac{(T^{n+1}-T^n)}{\Delta t} + 1$ .

Krok Eulerovy metody na jemné síti pro lokální úlohu s indexem  $i$  vypadá takto

$$\begin{cases} \left( \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} + \mathbf{A} \right) (\bar{u}_1^i)^{n+1} = b(t^{n+1}) + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} (\bar{u}_1^i)^n, \\ (\bar{u}_1^i)^0 = \bar{U}_1^n, \end{cases}$$

kde  $n = 1, 2, 3, \dots, N_t - 1$ .

Následně opět pomocí korekčních iterací pro  $k = 1, 2, \dots$  zvyšujeme přesnost řešení na hrubé síti. Jednotlivé iterace se skládají z následujících tří kroků:

1. Vypočtení skoků v bodech hrubé sítě  $\bar{S}_k^n$

$$\bar{S}_k^n = (\bar{u}_k^{n-1})^{N_t} - \bar{U}_k^n,$$

kde  $(\bar{u}_k^{n-1})^{N_t}$  rozumíme vektor vypočtený v posledním časovém kroce  $t^{N_t}$  lokální úlohy s indexem  $i = n - 1$ .

2. Propagování skoků na hrubé síti

$$\begin{cases} \left( \frac{1}{\Delta T} \mathbf{M} + \mathbf{A} \right) \bar{\delta}_k^{n+1} = \frac{1}{\Delta T} \mathbf{M} (\bar{\delta}_k^n + \bar{S}_k^n), \\ \bar{\delta}_k^0 = \bar{0}, \end{cases}$$

kde  $n = 1, 2, \dots, N - 1$ .

3. Sestavením  $\bar{U}_{k+1}^n$

$$\bar{U}_{k+1}^n = (\bar{u}_k^{n-1})^{N_t} + \bar{\delta}_k^n$$

a řešením nově sestavených lokálních úloh, která můžou být opět řešeny paralelně

$$\begin{cases} c \frac{\partial u_{k+1}^i}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u_{k+1}^i}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t), & x \in (0, L), \quad t \in (T^n, T^{n+1}), \\ u_{k+1}^i(0, t) = 0, & t \in (T^n, T^{n+1}), \\ u_{k+1}^i(L, t) = 0, & t \in (T^n, T^{n+1}), \\ u_{k+1}^i(T^n) = \bar{U}_{k+1}^n. \end{cases}$$

Předpis Eulerovy metody pro  $i$ -tou lokální úlohu v kroce  $k$  metody parareal je v tomto tvaru

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} + \mathbf{A} \right) (\bar{u}_{k+1}^i)^{n+1} = b(t^{n+1}) + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} (\bar{u}_{k+1}^i)^n, \\ (\bar{u}_{k+1}^i)^0 = \bar{U}_{k+1}^n, \end{array} \right.$$

kde  $n = 1, 2, 3, \dots, N_t - 1$ .

Jako ukončovací kritérium můžeme stejně jako u ODR uvažovat například nulovost skoků vypočtených v kroku 1. nebo sledovat eukleidovskou normu rozdílu dvou iterací  $\bar{U}_k^n$  a  $\bar{U}_{k+1}^n$ .



### 3.4 Příklad: řešení PDR metodou parareal

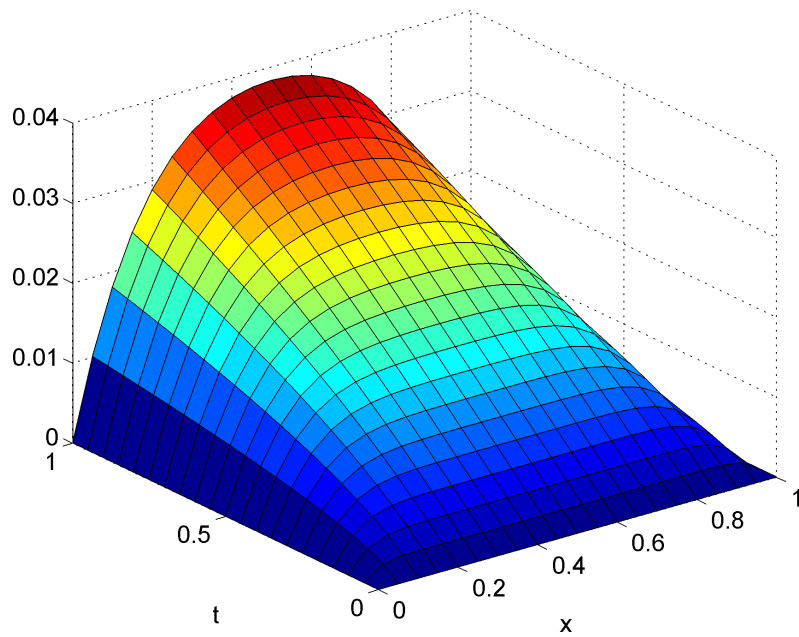
Uvažujme konkrétní nestacionární úlohu vedení tepla kterou budeme řešit pomocí metody parareal

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 25 \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) & = & 1, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, 1), \\ u(0, t) & = & 0, \quad t \in (0, 1), \\ u(1, t) & = & 0, \quad t \in (0, 1), \\ u(x, 0) & = & 0 \quad x \in (0, 1). \end{array} \right. \quad (24)$$

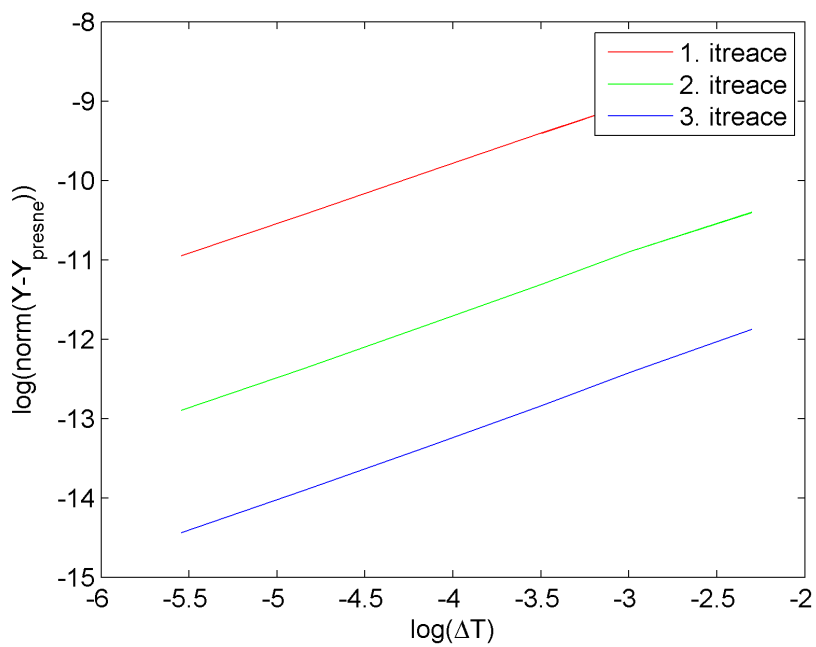
Analytické řešení při výpočtu chyby (20) v tomto případě nahradíme dostatečně jemnou aproximací s krokem v čase  $\frac{\Delta T}{100}$  oproti řešené úloze. Na úlohu 24 aplikujeme parareal pro PDR. Všechny výpočty byly prováděny s relativní přesností  $eps = 10^{-10}$ . Dílek jemné sítě byl zvolen jako  $\Delta T/100$ . Na obrázku 9 je vykreslen graf řešení pro konkrétní hodnotu  $\Delta T$ . V tabulce 2 jsou vypsány počty iterací dosažené pro jednotlivé diskretizace. Počet iterací se sice moc nemění pokud bychom ale vzali v úvahu jejich časovou náročnost, pravděpodobně by byla pro jemnější diskretizace mnohem větší. v grafu 10 jsou znázorněny konvergenční křivky, které opět odpovídají tvrzení 1.

Tabulka 2: Počty iterací pararealu pro PDR v závislosti na diskretizaci hrubé sítě.

$\Delta T = h$	Počet iterací parareal
1/10	9
1/20	11
1/32	11
1/64	11
1/128	10
1/256	10



Obrázek 9: Řešení úlohy metodou parareal (24) pro  $\Delta T = h = \frac{1}{20}$ .



Obrázek 10: Graf konvergenčních křivek prvních 3 iterací pararealu pro PDR.

## 4 Schwarzova metoda rozložení oblasti

V následující části práce si představíme Schwarzovu metodu rozložení oblasti s překrytím. Tato metoda dekomponuje oblast, na které je řešena okrajová úloha na menší podoblasti s částečným překrytím, kde jsou opět řešeny samostatně menší okrajové úlohy. Výhodou je, že úlohy na podoblastech, jsou na sobě nezávislé a mohou být řešeny paralelně. Jednotlivé úlohy na podoblastech jsou mezi sebou vzájemně korigovány v iteracích pomocí komunikace za účelem úpravy okrajových podmínek. Obsahem této kapitoly bude nejprve obecný popis Schwarzovy metody s překrytím pro dvě podoblasti, poté se podíváme na příklad její aplikace na úlohu vedení tepla v časoprostorové doméně. Podrobnější popis a více informací týkajících se Schwarzovy metody můžeme nalézt v [8] nebo [4].

### 4.1 Schwarzova metoda pro nestacionární úlohu vedení tepla

Uvažujme následující počáteční a okrajovou časoprostorovou úlohu vedení tepla na časoprostorové oblasti  $\Omega = (0, L) \times (0, T)$

$$\begin{aligned} c \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= f(x, t), & (x, t) \in \Omega, \\ u(0, t) &= g_1(t), & t \in (0, T), \\ u(L, t) &= g_2(t), & t \in (0, T), \\ u(x, t_0) &= u_0(x) & x \in (0, L). \end{aligned}$$

Zavedeme dělení oblasti  $\Omega$  pouze v prostorové souřadnici na dvě libovolně velké podoblasti  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$ , které splňují následující podmínky

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \bigcup \overline{\Omega}_2,$$

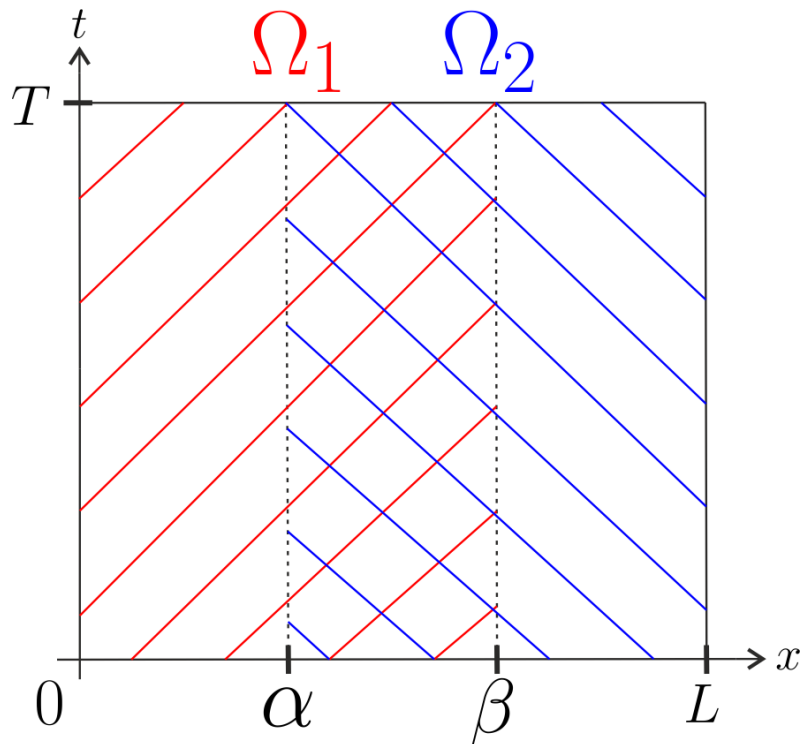
$$\emptyset \neq \Omega_1 \bigcap \Omega_2.$$

Okraje hranice  $\Omega_1$  budou dány v prostorových souřadnicích bodem 0 a  $\beta$ . Dále okraje oblasti  $\Omega_2$  budou dány v prostorových souřadnicích bodem  $\alpha$  a  $L$ . V časovém intervalu dělení neprovádíme a každá z nich tedy zahrnuje celý časový interval. Prohlédněme si také obrázek 11 graficky znázorňující dekompozici do dvou oblastí s překrytím.

$$\Omega_1 = (0, \beta) \times (0, T)$$

$$\Omega_2 = (\alpha, L) \times (0, T)$$

Na těchto nově zavedených oblastech budeme nyní iteračně hledat řešení následujících úloh jako funkce  $u_1^p(x, t)$  pro oblast  $\Omega_1$  a  $u_2^p(x, t)$  pro  $\Omega_2$ , kde  $p$  je číslo iterace. Okrajové podmínky pro nultou iteraci ( $p = 0$ ) Schwarzovy metody v bodech  $\alpha$  a  $\beta$  zvolíme identicky k hodnotě



Obrázek 11: Dekompozice časoprostorové oblasti na dvě podoblasti s překrytím.

okrajové podmínky, která má prostorovou souřadnici blíže danému bodu.

$$u_1^0(\beta, t) = u(L, t) = g_2(t), \quad t \in (0, T).$$

$$u_2^0(\alpha, t) = u(0, t) = g_1(t), \quad t \in (0, T).$$

Formulace úloh pro jednotlivé podoblasti v  $p$ -té iteraci poté vypadají následovně.

$$\begin{aligned} c \frac{\partial u_1^p}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u_1^p}{\partial x^2}(x, t) &= f(x, t), & (x, t) \in \Omega_1, \\ u_1^p(0, t) &= g_1(t), & t \in (0, T), \\ u_1^p(\beta, t) &= u_2^{p-1}(\beta, t), & t \in (0, T), \\ u_1^p(x, t_0) &= u_0(x) & x \in \langle 0, \beta \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c \frac{\partial u_2^p}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u_2^p}{\partial x^2}(x, t) &= f(x, t), & (x, t) \in \Omega_2, \\ u_2^p(\alpha, t) &= u_1^{p-1}(\alpha, t), & t \in (0, T), \\ u_2^p(L, t) &= g_2(t), & t \in (0, T), \\ u_2^p(x, t_0) &= u_0(x) & x \in \langle \alpha, L \rangle. \end{aligned}$$

pro  $p = 1, 2, 3, \dots$  Pro cíle, které v této práci máme si v případě Schwarzovy metody vystačíme s pevným počtem jejich iterací a nemusíme tedy volit žádné sofistikované ukončovací kritérium.

**Poznámka 4** Tyto úlohy na podoblastech lze řešit již dříve postupem v kapitole 2 pro PDR vedení tepla s nehomogenními okrajovými podmínkami.

Výsledné řešení po  $p$ -té iteraci mohu sestavit například takto

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_1^p(x, t), & (x, t) \in (0, \alpha) \times (0, T), \\ u(x, t) &= u_2^p(x, t), & (x, t) \in \Omega_2. \end{aligned} \tag{25}$$

---

```
clear;clc;%close all;
%nx/nt pocet dilku diskretizace v prostoru/case
nx=30; nt=30;
% c=25;

Tend = 1;
Xend = 1;
dt = Tend/(nt);
h = Xend/(nx);

tspan = 0:dt:Tend;
uzly = 0:h:Xend;

eps=1e-10;
alfa=0.4;
beta=0.6;
u_alfa=zeros(length(tspan),1);
u_beta=zeros(length(tspan),1);
u0_1=zeros(length(tspan),1);% Dirichlet pro x=0
u0_2=zeros(length(tspan),1);% dirichlet pro x=1

uzly_u1 = 0:h:beta;
uzly_u2 = alfa:h:1;
u1=zeros(length(uzly_u1),1);
u2=zeros(length(uzly_u2),1);

[coords1u1,coords2u1]=meshgrid(uzly_u1,tspan);
[coords1u2,coords2u2]=meshgrid(uzly_u2,tspan);
[coords1,coords2]=meshgrid(uzly,tspan);

for i = 1:length(uzly_u1)
if abs(uzly_u1(i) - alfa) < eps
```

```

index_alfa = i;
end
end
for i = 1:length(uzly_u2)
if abs(uzly_u2(i) - beta) < eps
index_beta = i;
end
end

iterace = 0;
while 1
u1_old = u1;
u2_old = u2;

[ u1 ] = MKP_interval(0,beta,h,dt,u0_1,u_beta,tspan);
[ u2 ] = MKP_interval(alfa,1,h,dt,u_alfa,u0_2,tspan);

u_alfa = u1((index_alfa*(length(tspan))-nt:index_alfa*(length(tspan))));
u_beta = u2((index_beta*(length(tspan))-nt:index_beta*(length(tspan))));

u_schwarz = [u1(1:(index_alfa-1)*(length(tspan)));u2];

[ uBE ] = MKP_interval(0,1,h,dt,u0_1,u0_2,tspan);

err(iterace+1)=norm(u_schwarz-uBE)/norm(uBE)

iterace=iterace+1;

if iterace == 6
break;
end
end

```

---

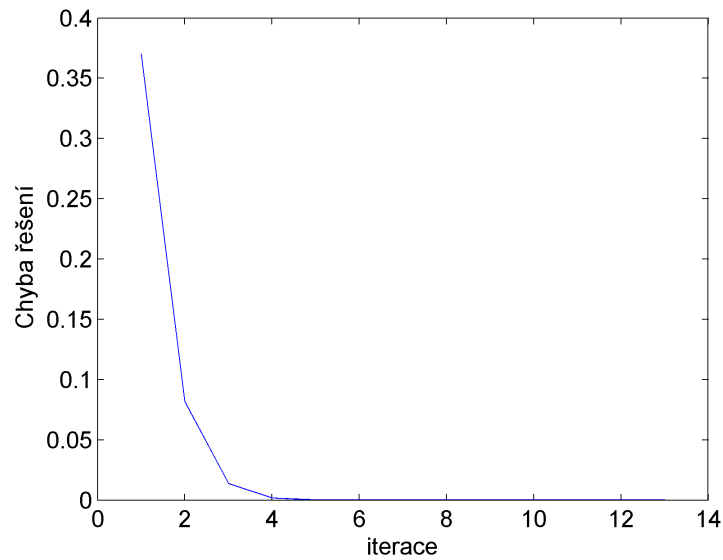
Výpis 3: Algoritmus Schwarzovy metody pro nestacionární úlohu

## 4.2 Příklad: Schwarzova metoda v prostoru pro časoprostorovou úlohu

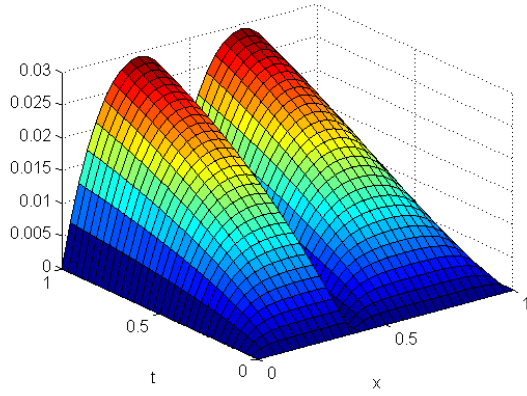
Uvažujme nestacionární úlohu vedení tepla popsanou následující počáteční a okrajovou úlohou.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 25 \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) & = & 1, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, 1), \\ u(0, t) & = & 0, \quad t \in (0, 1), \\ u(1, t) & = & 0, \quad t \in (0, 1), \\ u(x, t_0) & = & 0 \quad x \in \langle 0, 1 \rangle. \end{array} \right. \quad (26)$$

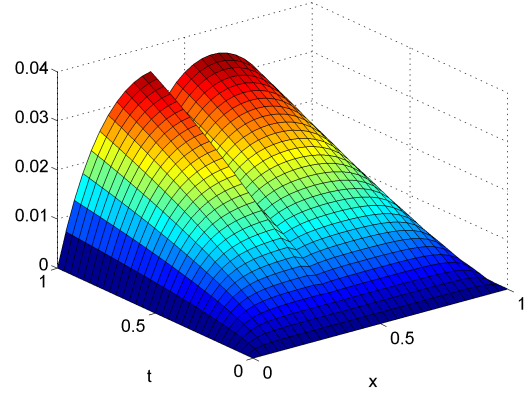
úlohu rozložíme do dvou podoblastí a řešíme následně nezávislé úlohy v iteracích Schwarzovy metody kde hranice jsou definovány body  $\alpha = 0.4$ ,  $\beta = 0.6$ . Na obrázcích 13 vidíme prvních 6 iterací Schwarzovy metody pro úlohu (26) s diskretizací  $h = \Delta T = \frac{1}{30}$ ,  $\alpha = 0.4$ ,  $\beta = 0.6$ . V grafu 12 vidíme chybu iterace Schwarzovy metody vzhledem k řešení ekvivalentní úlohy bez jejího použití. Chyba je vypočtena jako eukleidovská norma rozdílu obou řešení. Pozorujeme, že po šesté iteraci je chyba v řádu  $10^{-6}$ . Při párování s metodou parareal je to dostačující a budeme proto při jejím použití provádět maximálně 6 iterací.



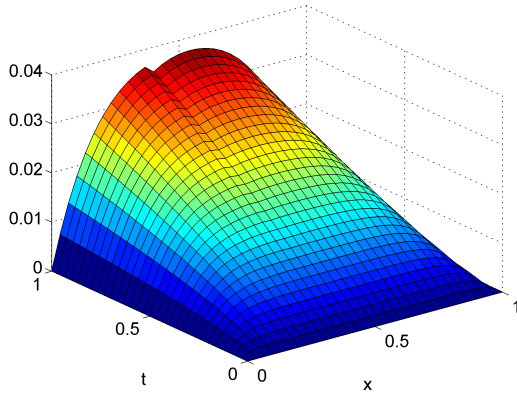
Obrázek 12: Chyba iterací Schwarzovy metody pro úlohu 26 s diskretizací  $h = \Delta T = \frac{1}{30}$ ,  $\alpha = 0.4$ ,  $\beta = 0.6$ .



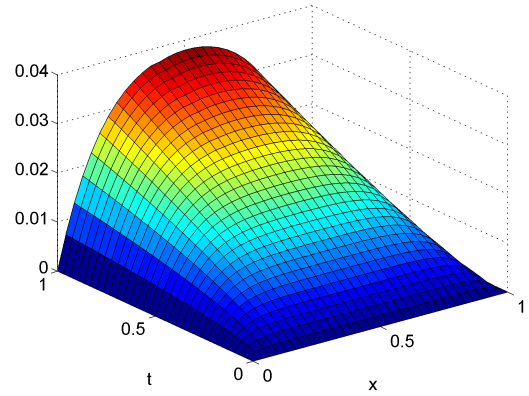
(a) 1. iterace



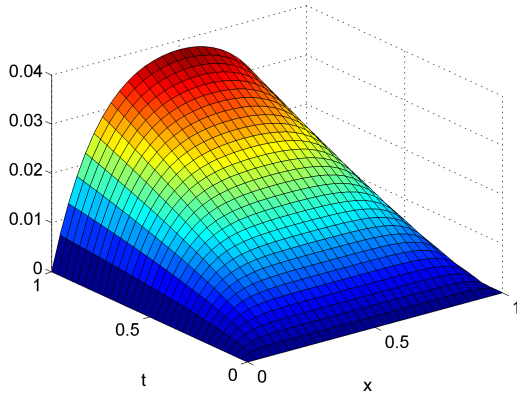
(b) 2. iterace



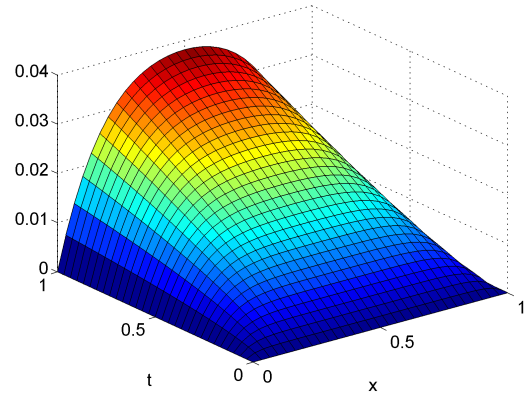
(c) 3. iterace



(d) 4. iterace



(e) 5. iterace



(f) 6. iterace

Obrázek 13: Iterace Schwarzovy metody pro úlohu (26) s diskretizací  $h = \Delta T = \frac{1}{30}$ ,  $\alpha = 0.4$ ,  $\beta = 0.6$ .



## 5 Párování metody parareal se Schwarzovou metodou

Využijeme nyní poznatků o metodách z předchozích kapitol a ukážeme si, jak lze tyto metody efektivně spárovat. Každá z těchto dvou metod má při paralelní implementaci pro časoprostorovou úlohu značnou nevýhodu. Parareal lze použít pro pararelizaci pouze v čase, naopak Schwarzovu metodu používáme pouze pro dekompozici na více úloh v prostorové doméně. Jejich propojením tedy získáme možnost řešit úlohy v časoprostorové oblasti paralelně v čase i prostoru. Stejným tématem kombinace pararealu a doménové dekompozice se zabývají také práce [6] a [5]. V této diplomové práci se budeme nadále věnovat rozložení pararealem vytvořených lokálních počátečních úloh také v prostoru pomocí Schwarzovy metody.

### 5.1 Použití Schwarzovy metody na lokální úlohy v pararealu

Popíšeme nyní vlastní postup při párování párování metody parareal se Schwarzovou metodou. Budeme opět uvažovat již známou počáteční a okrajovou úlohu na oblasti  $\Omega = (0, L) \times (0, T)$ , kde znovu pro zjednodušení zápisu uvažujeme pouze s nulovými homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami. V případě nehomogenních Dirichletových podmínek budeme podstatná popisovaná část algoritmu stejná a se znalostmi z předchozí kapitoly 2 by již mělo být zřejmé, jak v tomto případě postupovat.

$$\left\{ \begin{array}{ll} c \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= f(x, t), \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, T), \\ u(0, t) &= 0, \quad t \in (0, T), \\ u(L, t) &= 0, \quad t \in (0, T), \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad x \in (0, L). \end{array} \right.$$

Začneme nejprve stejně jako v metodě parareal. Zavedeme hrubou diskretizaci  $\Omega$  označenou jako  $\mathcal{T}_{h, \Delta T}$ , která je identická s hrubou diskretizací z kapitoly 3. Poté pomocí MKP a Eulerovy metody (23) provedeme počáteční aproximaci úlohy na hrubé síti označenou  $\bar{U}_1^n$ .

Hodnoty počáteční aproximace na hrubé síti  $\bar{U}_1^n$  nyní opět použijeme jako počáteční podmínky pro nezávislé lokální úlohy na časových intervalech  $\langle T^n, T^{n+1} \rangle$ . Připomeňme si formulaci  $i$ -té lokální lokální úlohy v  $k$ -té metody parareal

$$\left\{ \begin{array}{ll} c \frac{\partial u_k^i}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u_k^i}{\partial x^2}(x, t) &= f(x, t), \quad x \in (0, L), \quad t \in \langle T^n, T^{n+1} \rangle, \\ u_k^i(0, t) &= 0, \quad t \in \langle T^n, T^{n+1} \rangle, \\ u_k^i(L, t) &= 0, \quad t \in \langle T^n, T^{n+1} \rangle, \\ u_k^i(T^n) &= \bar{U}_k^n, \end{array} \right.$$

kde  $i = 0, 1, \dots, N$ .

Každou z těchto úloh rozložíme pomocí Schwarzovy metody na dvě samostatně řešitelné úlohy. Důležitou informací je, že tímto rozdělením umožníme časoprostorovou pararelizaci. Označme

oblast  $\Omega_i$  jako oblast příslušnou  $i$ -té lokální úloze pararealu.

$$\Omega_i = (0, L) \times (T^n, T^{n+1}).$$

Zavedeme dělení oblasti  $\Omega_i$  v prostorové souřadnici na dvě libovolně velké částečně se překrývající podoblasti  $\Omega_{i,\beta}$  a  $\Omega_{i,\alpha}$ , které splňují následující podmínky

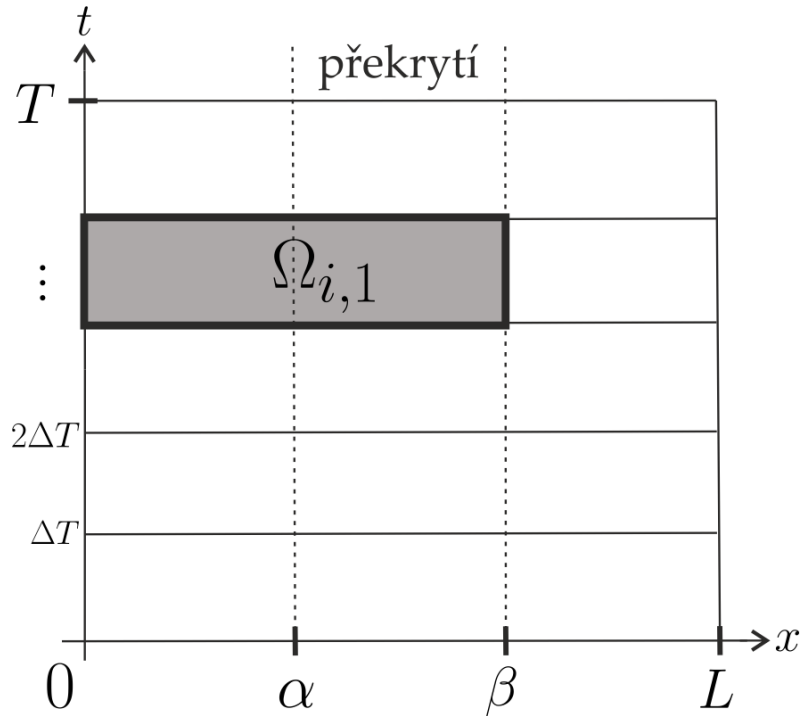
$$\overline{\Omega_i} = \overline{\Omega_{i,\beta}} \cup \overline{\Omega_{i,\alpha}},$$

$$\emptyset \neq \Omega_{i,\beta} \cap \Omega_{i,\alpha}.$$

Okraje hranice  $\Omega_{i,\beta}$  budou dány v prostorových souřadnicích body 0 a  $\beta$ . Dále okraje oblasti  $\Omega_{i,\alpha}$  budou dány v prostorových souřadnicích body  $\alpha$  a  $L$ . Pro lepší představu se podívejme na obrázek 14, který znázorňuje oblast  $\Omega_{i,\beta}$ .

$$\Omega_{i,\beta} = (0, \beta) \times (T^n, T^{n+1}),$$

$$\Omega_{i,\alpha} = (\alpha, L) \times (T^n, T^{n+1}).$$



Obrázek 14: Oblast  $\Omega_{i,\beta}$  vzniklá použitím Schwarzovy metody na lokální úlohu v pararealu

Nyní budeme v iteracích Schwarzovy metody hledat řešení následujících úloh jako funkce  $u_{k,\beta}^{i,p}(x, t)$  pro oblast  $\Omega_{i,\beta}$  a  $u_{k,\alpha}^{i,p}(x, t)$  pro  $\Omega_{i,\alpha}$ . Okrajové podmínky pro nultou iteraci ( $p = 0$ )

Schwarzovy metody v bodech  $\alpha$  a  $\beta$  zvolíme identicky k hodnotě okrajové podmínky, která má prostorovou souřadnici blíže danému bodu.

$$u_{k,\beta}^0(\beta, t) = u(L, t) = 0, \quad t \in (T^n, T^{n+1}).$$

$$u_{k,\alpha}^0(\alpha, t) = u(0, t) = 0, \quad t \in (T^n, T^{n+1}).$$

Formulace úloh pro jednotlivé podoblasti v  $p$ -té iteraci Schwarzovy metody a  $k$ -té iteraci pararealu jsou následující

$$\begin{aligned} c \frac{\partial u_{k,\beta}^{i,p}}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u_{k,\beta}^{i,p}}{\partial x^2}(x, t) &= f(x, t), & (x, t) \in \Omega_{i,\beta}, \\ u_{k,\beta}^{i,p}(0, t) &= 0, & t \in (T^n, T^{n+1}), \\ u_{k,\beta}^{i,p}(\beta, t) &= u_{k,\alpha}^{i,p-1}(\beta, t), & t \in (T^n, T^{n+1}), \\ u_{k,\beta}^{i,p}(T^n) &= \bar{U}_{k,\beta}^n, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} c \frac{\partial u_{k,\alpha}^{i,p}}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u_{k,\alpha}^{i,p}}{\partial x^2}(x, t) &= f(x, t), & (x, t) \in \Omega_{i,\alpha}, \\ u_{k,\alpha}^{i,p}(\alpha, t) &= u_{k,\beta}^{i,p-1}(\alpha, t), & t \in (T^n, T^{n+1}), \\ u_{k,\alpha}^{i,p}(L, t) &= 0, & t \in (T^n, T^{n+1}), \\ u_{k,\alpha}^{i,p}(T^n) &= \bar{U}_{k,\alpha}^n, \end{aligned} \quad (28)$$

pro  $p = 1, 2, 3, \dots$ , kde  $\bar{U}_{k,\alpha}^n$  a  $\bar{U}_{k,\beta}^n$  jsou částí vektoru  $\bar{U}_k^n$  odpovídající rozdělení na podoblasti  $\Omega_{i,\alpha}$  a  $\Omega_{i,\beta}$ ,  $i = 0, \dots, N$  a  $k$  je číslo iterace pararealu. Identicky s kapitolou 3 zavedeme jemné dělení  $\mathcal{T}_{h,\Delta t}$ . Body tohoto dělení v prostoru musí nyní navíc respektovat rozdělení na podoblasti  $\Omega_{i,\alpha}$  a  $\Omega_{i,\beta}$  to znamená, že některé z jeho bodů musí být rovny  $\alpha$  a  $\beta$ .

Pomocí znalostí získaných z předchozích kapitol jsme schopni získat numerickou aproximaci řešení úloh (27) a (28) pro  $k = 1$  na všech podoblastech. Jejich numerické řešení označíme jako  $(\bar{u}_{1,\alpha}^i)^n$  a  $(\bar{u}_{1,\beta}^i)^n$ , pro  $n = 0, \dots, N_t$ . Podle (25) jsme z nich schopni sestavit výsledné řešení Schwarzovy metody  $(\bar{u}_1^i)^n$  pro  $i$ -tou lokální úlohu metody parareal.

Poté již můžeme opět přistoupit k provádění korekčních iterací pararealu pro  $k = 1, 2, \dots$ . Připomeňme si kroky z nich se iterace skládají a popíšeme případné změny.

1. Vypočtení skoků v bodech hrubé sítě  $\bar{S}_k^n$

$$\bar{S}_k^n = (\bar{u}_k^{n-1})^{N_t} - \bar{U}_k^n,$$

kde  $(\bar{u}_k^{n-1})^{N_t}$  rozumíme vektor vypočtený v posledním časovém kroce  $t^{N_t}$  lokální úlohy s indexem  $i = n - 1$ .

2. Propagování skoků na hrubé síti

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{1}{\Delta T} \mathbf{M} + \mathbf{A} \right) \bar{\delta}_k^{n+1} &= \frac{1}{\Delta T} \mathbf{M} (\bar{\delta}_k^n + \bar{S}_k^n), \\ \bar{\delta}_k^0 &= \bar{0}, \end{aligned} \right.$$

kde  $n = 1, 2, \dots, N - 1$ .

3. Sestavením  $\bar{U}_{k+1}^n$

$$\bar{U}_{k+1}^n = (\bar{u}_k^{n-1})^{N_t} + \bar{\delta}_k^n$$

a řešením nově sestavených lokálních úloh nyní již i s využitím jejich rozkladu v prostorové oblasti Schwarzovou metodou vedoucí na k sestavení  $\bar{u}_{k+1}^i$  pro všechna  $i = 0, 1, \dots, N$ .

V metodě parareal vezmeme jako ukončovací kritérium eukleidovskou normu rozdílu dvou iterací  $\bar{U}_k^n$  a  $\bar{U}_{k+1}^n$ . Ve Schwarzově metodě si vystačíme s pevným počtem iterací a ukončovací kritérium tedy není potřeba definovat.

---

```
function [Y,iterace,err]=parareal_shwarz(Y0,TSPAN,DT)
%parovani pararealu a Schwarzovy metody
global S
eps = 1e-10;
dt = DT/100;
Tend = TSPAN(end);
T0 = TSPAN(1);
N = round((Tend-T0)/DT);
[Y] = backwardEuler(Y0,TSPAN,DT);

tspan_exact= TSPAN(1):dt:TSPAN(end);
[Y_exact_tmp] = backwardEuler(Y0,tspan_exact,dt);

ind=1;
for i=1:length(tspan_exact)
if abs(tspan_exact(i) - TSPAN(ind))<eps
Y_exact(:,ind) = Y_exact_tmp(:,i);
ind = ind + 1;
end
end

itMax = N+100;
Y_n = {};
iterace = 0;
for i = 1:itMax
iterace=iterace+1;
y(:,1)=Y(:,1);
for j = 1:N
y0 = Y(:,j);
```

```

t0 = TSPAN(j);
tend = TSPAN(j+1);
tspan = t0:dt:tend;
[y_act] = schwarz(y0,tspan,dt); %% zde je zmena oproti cistemu pararealu
y(:,j+1) = y_act(:,end);
end

%%Vypocti skoky
S=y-Y;

%%propaguj skoky
delta0=zeros(length(Y0),1);
[delta] = backwardEuler_delta(delta0,TSPAN,DT);

Y_n{i}=Y;
Y=y+delta;

err(i)=log(norm(Y-Y_exact)/norm(Y_exact));

if norm(Y-Y_exact)<eps %|| norm(S) == 0
break
end

end

end

```

---

Výpis 4: Algoritmus párování metody parareal a Schwarzovy metody

## 5.2 Příklad: Párování metody parareal se Schwarzovou metodou

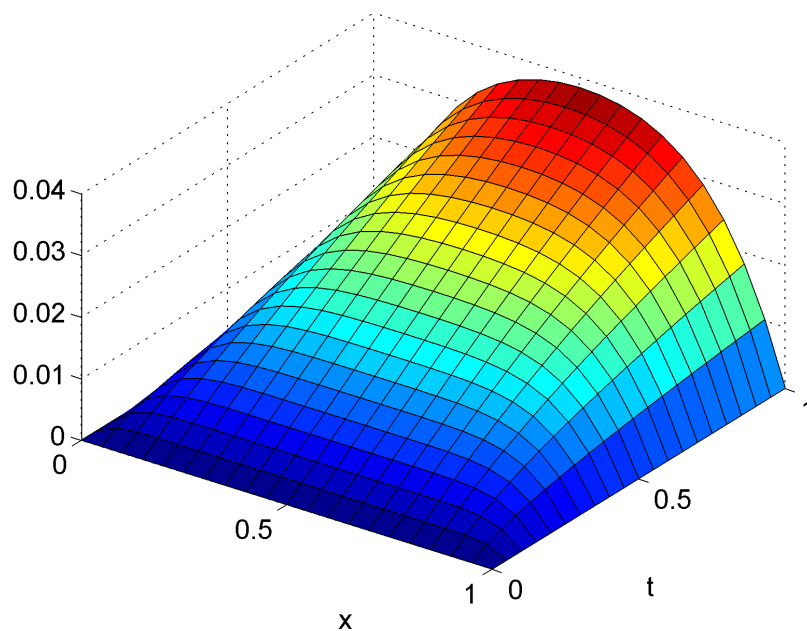
Uvažujme níže zadanou počáteční a okrajovou úlohu

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 25 \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) & = & 1, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, 1), \\ u(0, t) & = & 0, \quad t \in (0, 1), \\ u(1, t) & = & 0, \quad t \in (0, 1), \\ u(x, t_0) & = & 0 \quad x \in (0, 1). \end{array} \right. \quad (29)$$

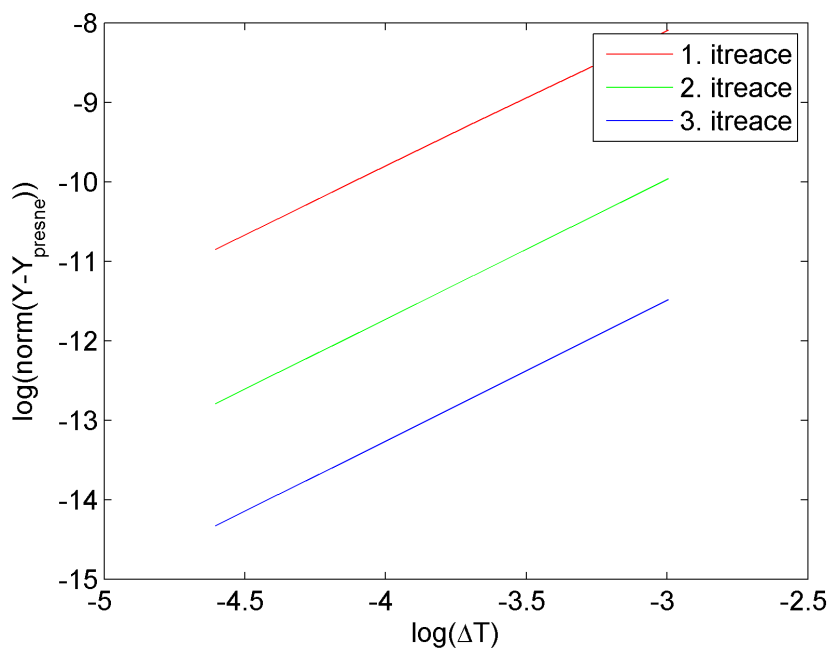
Na tuto úlohu nyní různé aplikujeme diskretizace  $\mathcal{T}_{h, \Delta T}$ , kde  $h = \Delta T$  a  $\mathcal{T}_{h, \Delta t}$ , kde  $\Delta t = \Delta T/100$ . Definujeme  $\alpha = 0,4$  a  $\beta = 0,6$  poté na úlohu použijeme popsany algoritmus párování metody parareal se Schwarzovou metodou. Následující výsledky byly počítány s reletivní přesností  $eps = 10^{-10}$ . Místo analytického řešení při výpočtu chyby (20) byla použita jeho aproximace na jemné síti. Na obrázku 15 ukazujeme graf řešení pro konkrétní diskretizaci. Tabulka 3 obsahuje porovnání počtu iterací pro párování, při kterém byly použity 3 a 6 iterací Schwarzovy metody na lokálních úlohách. Všimněme si především vysokého vysokého počtu iterací párování pro diskretizaci  $1/20$  a 3 iterace Schwarzovy metody. Znamená to tedy že nepřesnost ve Schwarzově metodě může velmi nepříznivě ovlivnit zbylo část řešení pomocí pararealu. Pokud však budeme řešit úlohy Schwarzovou metodou s dostatečnou přesností na parareal by to nemělo mít vliv a tvrzení 1 by mělo stále platit. Na grafech 16 a 17 vidíme že chyby první tři iterace párování s 3 i 6 iteracemi Schwarze jsou shodné a pomalá konvergence pro dělení  $1/20$  se tedy projevuje až v pozdějších iteracích.

Tabulka 3: Počty iterací pro párování pararealu a Schwarzovy metody v závislosti na diskretizaci hrubé sítě pro 3 a 6 iterací lokálních úloh Schwarzovy metody.

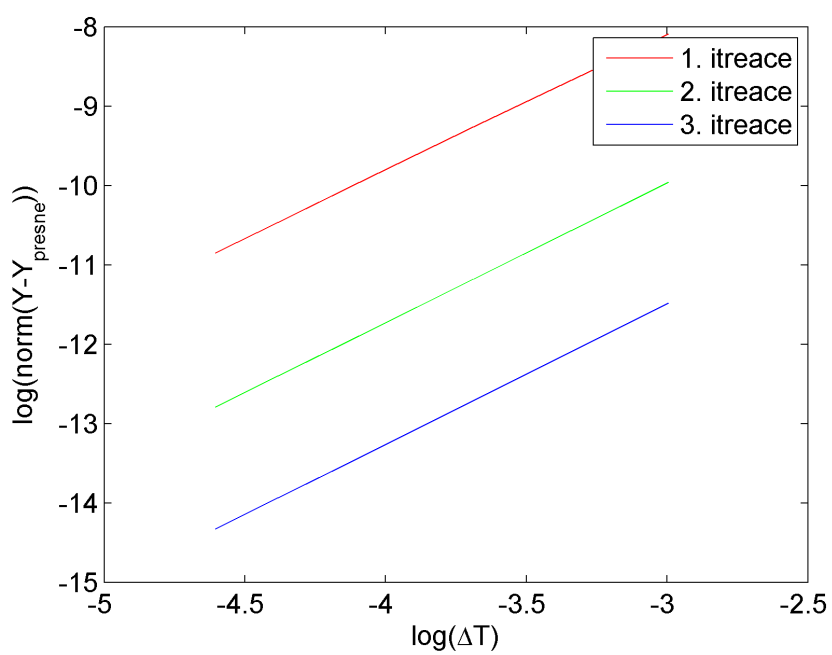
$\Delta T = h$	6 iterací Schwarzovy metody	3 iterace Schwarzovy metody
1/20	11	120
1/40	11	11
1/60	11	11
1/80	11	11
1/100	10	10



Obrázek 15: Řešení úlohy metodou párováním pararealu a Schwarzovy metody (29) pro  $\Delta T = h = \frac{1}{20}$ .



Obrázek 16: Graf konvergenčních křivek prvních 3 iterací párování pararealu a Schwarzovy metody s 3 iteracemi Schwarzovy metody na lokálních úlohách.



Obrázek 17: Graf konvergenčních křivek prvních 3 iterací párování pararealu a Schwarzovy metody s 6 iteracemi Schwarzovy metody na lokálních úlohách.



## 6 Závěr

V této práci jsem se zabýval řešením nestacionární rovnice vedení tepla pomocí MKP semi-diskretizace v prostoru vedoucí na soustavu ODR řešenou nejprve implicitní metodou Eulerovou metodou. Poté jsem představil metodu parareal umožňující řešit paralelně v čase zmíněné soustavy ODR. Následně jsem se věnoval Schwarzově metodě rozložení oblasti s překrytím a popsal jak ji použít pro prostorovou paralelizaci. Nakonec jsem představil algoritmus párování metody parareal a Schwarzovy metody rozložení oblastí. Pro všechny výše popsané metody a algoritmy jsem realizoval vlastní implementaci a pomocí numerických experimentů ověřil správnost své implementace.

Pro budoucí práci na tomto tématu by bylo vhodné podrobněji analyzovat chování párování metody parareal a Schwarzovy metody. Dalé se také nabízí vyzkoušet jiné metody doménové dekompozice místo Schwarzovy metody například některou z metod bez překrytí.

## Literatura

- [1] A. Quarterioni a A. Valli. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [2] Pavel Drábek a Gabriela Holubová. *Parciální diferenciální rovnice*. ZČU, VŠB-TUO, 2011.
- [3] Vondrák V. a Pospíšil L. *Numerické metody 1*. VŠB-TU Ostrava, 2011.
- [4] Martin J. Gander. Overlapping schwarz for linear and nonlinear parabolic problems. 1996.
- [5] Martin J. Gander, Yao-Lin Jiang a Rong-Jian Li. Parareal schwarz waveform relaxation methods. In *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XX*. Springer, 2013.
- [6] Turinici Gabriel a Yvon Maday. The parareal in time iterative solver: a further direction to parallel implementation. 2005.
- [7] Blaheta Radim. *Matematické modelování a metoda končných prvků*. VŠB-TU Ostrava, 2012.
- [8] Widlund Olof a Andrea Toselli. *Domain Decomposition Methods-Algorithms and Theory*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [9] Jacques-Louis Lions , Yvon Maday a Gabriel Turinici. A parareal in time discretization of pde's. In *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique*. 2001.
- [10] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications II/A: Linear Monotone Operators*. Springer-Verlag, New York, 1990.

## A Přílohy

Zdrojové kódy vytvořené v praktické části této diplomové práce jsou přiloženy na CD v kapse desek.